Nonnegative Matrix Factorization with Earth Mover's Distance Metric for Image Analysis

Roman Sandler; Michael Lindenbaum

IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence

Year: 2011, Volume: 33, Issue: 8

Pages: 1590 – 1602

本文说还是 NMF 非负矩阵分解，说的是有一个矩阵，其中每一列是一个数据点的 histogram 的特征向量

$$V \in \mathcal{R}^{N \times M},$$

我们要把它分解成两个非负的矩阵的乘积

$$V \approx HW, \quad s.t. \quad W \geq 0, H \geq 0.$$

我们希望分解前后的矩阵能越像越好，所以最小化他们之间的距离

$$\min_{H,W} Dist_{\phi}(V, HW) \; s.t. \; W \geq 0, H \geq 0,$$

既然 V 中间都是 histogram，那么最好的距离测度就是 earth mover’s distance 了。所以这里用 EMD 替换传统的 L2 norm distance

$$\min_{H,W} \; EMD(V, HW) \; s.t. \quad W \geq 0, H \geq 0.$$

什么是 EMD 呢？它是用来算俩 histogram 的距离的

$$(h^s, h^t)$$

俩 histogram， 一个 h^s 提供很多 supply bin，一个提供 h^t 很多个 demand bin, 从 bin i 到 bin j 需要 $d(i,j)$ 的力气

$$EMD(h^s, h^t) = \min_f \sum_{i,j} f(i,j) d(i,j) \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} & f(i,j) \geq 0, \\ & \sum_j f(i,j) \leq h_i^s, \\ & \sum_i f(i,j) \leq h_j^t, \end{aligned}$$

现在我们把俩 histogram 变成 V 和(HW)的 m 列

$$h^s = V_m \quad \text{and} \quad h^t = (HW)_m.$$

$$EMD(V_m, (HW)_m) = \min_f \sum_{i,j} f(i,j)d(i,j)$$

$$\text{s.t.} \quad f_m(i,j) \ge 0, \quad \sum_j f_m(i,j) = V(i,m), \quad \sum_i f_m(i,j) = \sum_k H(j,k)W(k,m).$$

这说了俩 histogram，那么对于 histogram 组成的矩阵，就是一列一列的 EMD 的和

$$\min_{H,W} \sum_{m=1}^{M} EMD(V_m, (HW)_m) = \sum_{m=1}^{M} \min_f \sum_{i,j} f_m(i,j)d(i,j)$$

$$s.t. \quad W \ge 0, H \ge 0.$$

$$f_m(i,j) \ge 0, \quad \sum_j f_m(i,j) = V(i,m), \quad \sum_i f_m(i,j) = \sum_k H(j,k)W(k,m).$$

怎么接这个问题呢？还是轮殴

- 先摁住 H，搞 f 和 W

$$\min_{f,W} \sum_m \sum_{i,j} f_m(i,j)d(i,j) \quad \text{s.t.} \quad f_m(i,j) \ge 0, \quad \sum_j f_m(i,j) = V(i,m), \quad \sum_i f_m(i,j) = \sum_k H(j,k)W(k,m).$$

这个问题还是通过作为一个线性规划的问题解。只不过把变量设定为[f, W]

- 然后摁住 W，搞 f 和 H

$$\min_{f,H} \sum_m \sum_{i,j} f_m(i,j) d(i,j) \quad \text{s.t.} \quad f_m(i,j) \geq 0,$$
$$\sum_j f_m(i,j) = V(i,m),$$
$$\sum_i f_m(i,j) = \sum_k H(j,k) W(k,m).$$

这个问题还是通过作为一个线性规划的问题解。只不过把变量设定为[f, H]

启发：

1. 可以用 graph 来求其流形特征：sum_m EMD(Im, HWm)-sum_{m,n}EMD(Hwm,Hwn) A_mn, 也就是说，如果在一个 graph 上，In Im 是相邻的（A_mn >0），那么 Hwm,Hwn 应该也是相邻的，EMD(Hwm,Hwn)应该小。
2. 这个问题也可以通过 LP 来解：fm(i,j)和 fmn(i,j)
3. 另外，如果是用来做分类，那么做 graph 的时候只求 H，而 w 要单独求。
4. 这篇文章的创新点就是用 EMD 来做 NMF，我们也可以用别的 distance/similarity 来做，比如 Correntropy Criterion。
5. 把 EMD 跟 convolutional 表达结合起来