在给定大小之下的素数个数

（On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity）

Bernhard Riemann

[Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859]

Translated by Linglei Meng

May 2007

如果我能尽快利用得到的许可来介绍我对素数个数增长的研究，我想我就可以很好的感谢科学院授予我的科学院院士的荣誉；这个问题应该是具有一定价值的，Gauss 和 Dirchilet 曾经在很长一段时期内对这一问题产生了浓厚的兴趣。

这一研究的出发点是基于 Euler 的关于乘积的一个观察

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

其中 p 取遍所有的素数，n 取遍所有的整数.当 s 是一个复变量时，我们将上面的两个表达式记为 $\zeta(s)$.这两个表达式收敛只有当 s 的实数部份大于 1。同时我们可以发现该函数的一个恒等式

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s} ,$$

首先我们观察到

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx ,$$

如果我们考虑下面的积分 $\int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$，积分限从 $-\infty$ 到 $+\infty$，这其中包括 0，但是不包括其他的定义域中的不连续点，容易发现上式等于

$$(e^{-\pi si} - e^{-\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx ,$$

基于$(-x)^{s-1}=e^{(s-1)\log(-x)}$，其中当$x$小于零时，$\log(-x)$有意义，有

$$2\sin\pi s\Pi(s-1)\zeta(s)=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}}{e^{x}-1}dx$$

其中积分的意义如上所描述.

这一等式给出了对于所有复数s所对应的$\zeta(s)$的值，并且说明这一函数的值对每一个有限的s是有限的，当$s=1$时除外；当s为负的偶数时，函数值为零.

如果的s的实数部分是负数，这个积分不仅可以在定义域的正数意义下积分，而且可以在包含所有剩余复变量的负数意义下积分，由于积分到无穷远，故此积分是无穷小的。然而，在定义域内，积分只有当x等于$\pm 2\pi i$的方幂时才是不连续的，并且积分就等于不连续的区间内的积分和。并且在$n2\pi i$的附近的值等于$(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$，由此我们可以得到$2\sin\pi s\Pi(s-1)\zeta(s)=(2\pi)^{s}\sum n^{s-1}((-i)^{s-1}+i^{s-1})$，由函数$\Pi$的性质我们可以得到$\zeta(s)$和$\zeta(1-s)$之间的关系，可以作如下的表示$\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$，把$s$用$1-s$代换值不变.

这一性质引导我介绍$\Pi(\frac{s}{2}-1)$在级数$\sum\frac{1}{n^{s}}$的主项，而不是$\Pi(s-1)$，我们可以得到$\zeta(s)$的一个直观表示

$$\frac{1}{n^{s}}\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_{0}^{\infty}e^{-nn\pi x}x^{\frac{n}{2}-1}dx,$$

令

$$\sum_{1}^{\infty}e^{-nn\pi x}=\psi(x)$$

我们有

$$\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_{0}^{\infty}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

由于

$$2\psi(x)+1=x^{-\frac{1}{2}}(2\psi(\frac{1}{x})+1),$$（Jacobi,Fund.S.184）

$$\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_{1}^{\infty}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_{1}^{\infty}\psi(\frac{1}{x})x^{\frac{s-3}{2}}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x^{\frac{s-3}{2}}-x^{\frac{s}{2}-1})dx$$

$$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_{1}^{\infty}\psi(x)(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s+1}{2}})dx$$

取 $s=\frac{1}{2}+it$ ，且 $\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(s)$ ，我们有

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-(tt+\frac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\log t)dx$$

或 $$\xi(t)=4\int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi(x)')}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\log t)dx,$$

这一函数是有限的对所有有限值 t ，并且使它发展到 tt 成为一个快速收敛的级数.对于实数部份大于 1 的复数 s ， $\log(s)=-\Sigma\log(1-p^{-s})$ ，仍然是有限的，并且对 $\xi(t)$ 有同样的结论，只有当 t 的虚部位于 $\frac{1}{2}it$ 和 $-\frac{1}{2}it$ 之间时， $\xi(t)$ 才发散. $\xi(t)=0$ 的实数部分位于 0 到 T 之间的根的个数接近于 $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ ；这是因为 $\int d\log\psi(t)$ 的积分范围为 t 的虚部位于 $\frac{1}{2}it$ 和 $-\frac{1}{2}it$ 之间且实数部分位于 0 到 T 之间时，积分值为 $(\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi})i$ ；这一积分值等于 $\xi(t)=0$ 位于此区域的根的个数与 $2\pi i$ 的乘积.有人发现几乎所有的跟斗位于这一区域内，很有可能所有的根都是实数.当然大家希望看到一个严格的证明;在经过了一些无效的尝试之后，我临时搁置了这一问题，因为看起来它对我下面的研究主题是不必要的.

如果用 α 定义方程 $\xi(\alpha)=0$ 的所有根，我们可以把 $\log\xi(t)$ 作如下的表示

$$\Sigma\log(1-\frac{tt}{\alpha\alpha})+\log\xi(0)$$

由于根的多少随着 t 以 $\log(\frac{t}{2t})$ 的速度增长，上边的表达式是收敛的并且对于无穷的 t 是无穷的 $t\log(t)$ ；这样它与 $\log\xi(t)$ 只有一个 tt 的差别,对于有限的 t 是连续并且有限的，除 tt 后。对无穷下的 t 便是无穷小的.这个差别是一个常数，取 $t=0$ 就可以得到.

借助上述的方法，小于 x 的素数个数就可以确定了.

当 x 不是素数时，定义 $F(x)$ 是小于 x 的素数个数；当 x 是一个素数时，取其比 $\frac{1}{2}$ 倍大，所以对于任意 x ， $F(x)$ 由一个间断点。有 $F(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$.

如果我们将等式 $\log\zeta(s)=-\Sigma\log(1-p^{-s})=\Sigma p^{-s}+\frac{1}{2}\Sigma p^{-2s}+\frac{1}{3}\Sigma p^{-3s}+\text{L}$ 中的 p^{-s} ，

p^{-2s}，……分别用 $s\int_{p}^{\infty} x^{-s-1}dx$，$s\int_{p^2}^{\infty} x^{-s-1}dx$，……代替，我们可以得到 $\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_{1}^{\infty} f(x)x^{-s-1}dx$，如果我们定义 $F(x)+\frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}})+\cdots$ 为 $f(x)$.

当复变量 $s=a+bi$ 的实部大于 1 时，这个函数是有意义的.等式 $g(s)=\int_{0}^{\infty} h(x)x^{-s}dx$ 在此范围内同样成立,利用 Fourier 的定理我们可以用 g 来表示 h.如果 $h(x)$ 是实函数，则这个等式可以作如下的分解

$$g(a+bi)=g_1(b)+ig_2(b),$$

其中 $g_1(b)=\int_{0}^{\infty} h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x$，$g_2(b)=-i\int_{0}^{\infty} h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x$.

将这两个等式乘 $(\cos(b\log y)+i\sin(b\log y))db$，并且从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，利用 Fourier 的定理，两个等式的右边都可以得到 $\pi h(y)y^{-a}$；这样如果我们将两个等式相加并且乘 iy^{a}，可以得到

$$2\pi i h(y)=\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^{s}ds,$$

其中 s 的实数部分是常数.

对于是 $h(y)$ 的间断点的 y，$h(y)$ 是通过间断点两边的平均值计算的.由 f 的定义方式，我们可以看出 h 具有同样的性质，因此广义来说 $f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\log\zeta(s)}{s}y^{s}ds$.

我们可以用 $\frac{s}{2}\log\pi-\log(s-1)-\log\Pi(\frac{s}{2})+\Sigma^{\alpha}\log(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha})+\log\xi(0)$ 代替 $\zeta(s)$；但是当取到无穷大时，这个积分的每一独立项不是收敛的，这样我们就应该将等式分成几部分来计算

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}x^{s}ds$$

这是因为 $$-\log\Pi(\frac{s}{2})=\lim_{m\to\infty}(\sum_{n=1}^{n=m}\log(1+\frac{s}{2n})-\frac{s}{2}\log m),$$

我们有 $$-\frac{d\frac{1}{s}\log\Pi(\frac{s}{2})}{ds}=\sum_{1}^{\infty}\frac{d\frac{1}{s}\log(1+\frac{s}{2n})}{ds},$$

这样 $f(x)$ 的表达式便成立了，除了 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^s ds=\log\xi(0)$，此时取下面的

形式 $$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d(\frac{1}{s}\log(1-\frac{1}{s}))}{ds}x^s ds.$$

但是 $\frac{d(\frac{1}{s}\log(1-\frac{s}{\beta}))}{d\beta}=\frac{1}{(\beta-s)\beta}$，如果 s 的实数部分大于 β 的实数部分，则有

$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\int_{\infty}^{x}x^{\beta-1}dx$，或者 $=\int_{0}^{x}x^{\beta-1}dx$，这取决于 β 的实数部分是负数还是正数. 对于此我们有下面的一个结果

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d(\frac{1}{s}\log(1-\frac{s}{\beta}))}{ds}x^s ds=-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log(1-\frac{s}{\beta})x^s ds$$

$$=\int_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\text{常数}$$

第一种情况;或 $=\int_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\text{常数}$，第二种情况.

第一种情况下常数是当 s 的实数部分趋于无穷大时得到的；第二种情况积分取决于几分是否取遍所有的复数，对于原来的积分路径，当 β 的虚部正无穷大时，积分趋于正无穷小，对于后一积分路径，积分趋于负无穷大.由此我么可以看出，$\log(1-\frac{s}{\beta})$ 是如何使常数消失的.

通过对 $f(x)$ 表达式的洞察，我们有

$$f(x)=Li(x)-\Sigma^{\alpha}(Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})+Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}))+\int_{x}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}+\log\xi(0),$$

其中在 Σ^{α} 中 α 取遍 $\xi(\alpha)=0$ 的所有具有正实部的根.通过对函数 ξ 的进一步讨论，我们可

以证明级数 $\Sigma(Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})+Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}))\log x$ 的值与积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\Sigma\log(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha})}{ds}x^s ds$ 的极限只是一致的，当 b 无限增长时，此积分是收敛的；然而也可以使其取到任意值.

从 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的关系 $f(x)=\Sigma\frac{1}{n}F(x^{\frac{1}{n}})$ 我们可以得到 $F(x)=\Sigma(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f(x^{\frac{1}{m}})$，其中 m 取遍所有的无平方因子数，μ 定义 m 的素因子的个数.

如果我们将 Σ^{α} 限制为有限项，那么 $f(x)$ 的微分随着 x 的增长而快速的减小，接近于

$$\frac{1}{\log x}-2\Sigma^{\alpha}\frac{\cos(\alpha\log x)x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

这给出了一个关于素数密度和素数平方数密度的一半以及素数三次方数的三分之一的和公式.

已知的逼近公式 $F(x)=Li(x)$ 的阶是 $x^{\frac{1}{2}}$，并且是一个很大的值；由于在 $F(x)$ 没有周期项，并且不会随 x 增长至无穷：

$$Li(x)-\frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}})-\frac{1}{5}Li(x^{\frac{1}{5}})+\frac{1}{7}Li(x^{\frac{1}{7}})+\cdots$$

事实上，比较 $Li(x)$ 和小于 x 的素数个数，Gauss 和 Goldschmidt 计算到了三百万，在前三十万个数中总是比 $Li(x)$ 小;事实上，这个差别随着 x 的逐渐变化有一定的变化. 但是素数密度的变化由此决定这一事实已经引起了注意. 沿着各个独立周期项对素数密度公式的影响进行讨论对于未来任何的研究都是十分有趣的. $F(x)$ 的更多性质都将通过对 $f(x)$ 的研究而展现出来，事实上在对前一百个数的研究就已经发现，其与 $Li(x)+\log\xi(0)$ 一致.

注： 这是 Riemann 在 1859 年发表的论文《在给定大小之下的素数个数》的中文翻译，英文版文见 http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf。这篇文章中肯定有很多翻译不是十分准确，请将您的建议发送至 llmeng@yahoo.com，转载请注明出处。