

# 投资组合理论——学院派和复利派之争

鲁晨光

最近，万卷出版公司出版了美国作者威廉·庞德斯通写的《财富公式：玩转拉斯维加斯和华尔街的故事》<sup>1</sup>（后面简称《财富公式》），该书详细地介绍了围绕凯利公式发生的许多有趣故事，使得投资组合的学院派（以马科维茨理论为基础）和复利派（以几何平均收益为准则）之争在中国更加广为人知。早在1997年，中国科技大学出版社就出版了我的专著《投资组合的熵理论和信息价值——兼谈股票期货等风险控制》<sup>2</sup>——它正好包含了《财富公式》所缺少的技术细节。从美国长期资本公司失败到最近的次贷危机，越来越多的案例揭示了，投资组合理论的学院派存在严重问题，基于马氏理论的风险测度  $\text{Var}$  不能很好反映投资风险。现在正是投资界考虑接受一种不同的投资组合理论的时候了。

## 什么是投资组合？

首先我们从掷硬币打赌谈起。假设有一种可以不断重复的投资或打赌，其收益由掷硬币确定，硬币两面出现的可能性相同；出A面你投一亏一，出B面你投一赚二；假设你开始只有100元，输了没法再借。现在问怎样重复下注，可以使你尽快地由百元户变为百万元户？凯利公式告诉我们，每次将你所有资金的25%用来下注，你变为百万富翁的平均速度将最快。前面的打赌中，硬币只有一个。如果同时有两个、三个或更多，赌不同硬币的赢亏幅度也不同，两面出现的概率也可能不同；那么，怎样确定在不同硬币上的最优下注比例？如果不同硬币出现A面B面是不同程度相关的（比如一个出A面，另一个十有八九相同——正相关，或相反——反相关），又如何确定最优下注比例？股票、期货、期权、放贷、房地产、高科技等投资象掷硬币打赌一样，收益是不确定的且是相互关联的。如何确定在不同证券或资产上的投资比例，以使资金稳定快速增长，并且风险较小，这就是投资组合理论要解决的问题。

## 马科维茨理论及其缺陷

1952年，马科维茨（Harry Markowitz）发表了《有价证券的选择：有效的转移》。他导致了投资组合理论的诞生。1990年，瑞典皇家科学院将诺贝尔经济学奖授予了马科维茨、夏普（William F. Sharpe）和米勒（Merton Miller），以表彰他们在投资组合和证券市场理论上的贡献。

马科维茨用期望收益  $E$  和标准方差  $d$  表示一种证券的投资价值和风险。期望收益也就是算术平均收益。收益的标准方差  $d$  反映了收益的不确定性。比如对于上面的掷硬币打赌，用全部资金下注时，

$$E = P_1 r_1 + P_2 r_2 = 0.5 \times (-1) + 0.5 \times 2 = 0.5$$
$$d = [P_1 (r_1 - E)^2 + P_2 (r_2 - E)^2]^{0.5} = [0.5(-1-0.5)^2 + 0.5(2-0.5)^2]^{0.5} = 1.5$$

上式中  $P_1=0.5$  和  $r_1=-1$  是亏钱的概率和幅度， $P_2=0.5$  和  $r_2=2$  是赢钱的概率和幅度。根据马科维茨理论，期望越大越好，而标准方差越小越好。至于两种证券或组合，一个比另一个期望收益大，标准方差也大，那么选择哪个好呢？马科维茨理论认为这没有客观标准。有人

<sup>1</sup> 参看：<http://lz.book.sohu.com/serialize-id-9220.html>

<sup>2</sup> 参看：<http://survivor99.com/lcg/books/portfolio/index.htm>

不在乎风险而只希望期望收益越大越好，而有人为了小一些的风险而情愿要低一些的期望收益。

马科维茨证明了，通过分散投资互不相关或反相关的证券，可以在不降低期望收益的情况下，减小总的投资的标准方差（即风险）。比如同时用两个硬币打赌，赢亏幅度同样，每种证券下注 50%时，收益的可能性有三种：1)两边亏，亏 100%，概率是=0.25；2)一亏一赢，赢 50%，概率=0.5；3)两边赢，赢 200%，概率是 0.25。这时期望收益  $E=0.5$  不变，标准方差  $d$  则由 1.5 减小为 1.06。如果两个硬币的赢亏总是反相关的，比如一个出 A 面，另一个必定出 B 面，反之亦然；则期望收益不变，标准方差为  $d=0$ ——完全无风险。

马科维茨理论的成就是巨大的，但是其缺陷也是不可忽视的。缺陷之一是：不认为有客观的最优投资比例，或者说并不提供使资金增值最快的投资比例（当然也就不能解决前面的掷硬币打赌问题）；缺陷之二是：标准偏差并不能很好反应风险。下面我们举例说明。

例：两种证券当前价格皆是 1 元，证券 I (象是期权) 未来价格可能是 0 元和 2 元，概率分别为 1/4 和 3/4 (参看图 1，其中产出比=本利和/本金=1+收益)。证券 II (象是可换股债券) 的收益的期望和标准方差同样是 0.5 和 0.886，但是产出比以 1.5 为中心对称反转了一下。两者投资价值分析如表 1 所示(这里忽略银行利息和交易手续费)。

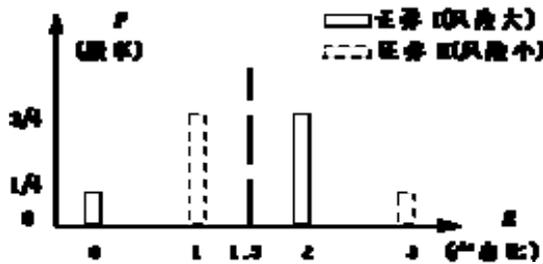


图 1. 期望和标准方差相同但风险不同的两个证券

表 1. 期望收益和标准方差相同的两种证券的投资价值分析

	$E$	$D$	满仓时的 $G$	优化比例%	优化后的 $G$
证券 I	0.5	0.886	-100%	50	15%
证券 II	0.5	0.886	32%	100	32%

表中-100%意味着可能破产。按马科维茨理论，I 和 II 投资价值相同，而按常识和基于复利准则的投资组合理论，II 远优于 I。对于存在大比例亏损可能的投资，比如期权、期货、放贷(可能收不回本金)、卫星发射和地震保险(风险极大而标准方差并不大)，马科维茨理论的缺陷尤为明显。

标准方差和 VaR 掩盖了小概率深度亏损，而小概率事件可能非常可怕。美国长期资本公司破产、次贷危机、中信泰富和深南电因为累积看跌期权 Accumulator 产生巨亏，都是因为忽视了小概率深度亏损。《证券市场周刊》12 月 6 号的封面文章《大银行的长尾》(作者：杜丽虹)讲的就是银行业小概率深度亏损问题。文中说明，一旦危机发生，本来不相关的业务突然变得相关起来，小概率变成大概率。不久流行的《黑天鹅》<sup>3</sup>一书，谈的也

<sup>3</sup> 参看：[http://www.gemag.com.cn/gemag/new/Picnew\\_content.asp?C\\_id=825](http://www.gemag.com.cn/gemag/new/Picnew_content.asp?C_id=825)

是不要忽视偶然的深度亏损。可见大家越来越注意到小概率深度亏损的重要性。

### 基于复利准则的投资组合理论(简称 G 理论)

复利通俗说来就是利滚利的利率, 学术上叫几何平均收益。比如 100 元 10 年后变成 1100 元, 单利或算术平均收益是  $(1100-100)/10=100\%$ , 但是复利或几何平均收益  $x$  由下式确定:  $(1+x)^{10}=1100/100$ 。由此解得  $x=27\%$ 。几何平均收益反映长期累积增值, 但是算术平均收益不能反映。比如有两个证券, 一个每年增值 25%; 另一个一年增值 100%, 下一年又亏损 50%, 反复如此(长期不赚钱)。虽然后一个证券的算术平均收益也是 25%, 但是其几何平均收益是 0, 所以其投资价值差远了。

对于上面的掷硬币打赌, 几何平均产出比  $R_g = 1 + G$  ( $G$  是几何平均收益) 随下注比例  $q$  的变化是

$$R_g = (1-q)^{P_1} (1+2q)^{P_2} = (-2q + q + 1)^{0.5}$$

其中  $P_1$  和  $P_2$  分别是亏损和赢利的概率。数学分析表明,  $q = 0.25$  时, 几何平均收益  $R_g$  达最大。这就是说, 对于上面的掷硬币打赌, 25% 是最优投资比例。

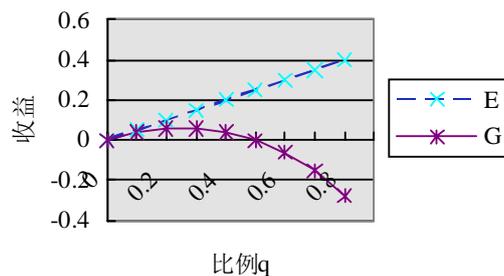


图 2. E 和 G 随 q 的变化

对于上面的掷硬币打赌, 算术平均收益  $E$  和几何平均收益  $G$  随下注比例  $q$  的变化如图 2 所示。容易看出, 算术平均收益  $E$  和投资比例  $q$  成正比关系; 而几何平均收益  $G$  不是,  $q$  太大反而不好, 如果  $q > 0.5$  则从长远看必然亏损。可见复利准则对头寸和杠杆的限制很严。

上面假设硬币的两面出现的可能性或概率相同, 赢亏幅度是给定的 (-1 和 2)。如果硬币是弯的,  $P_1$  和  $P_2$  皆不等于 0.5, 并且亏损和赢利的幅度也是变的(为  $r_1 < 0$  和  $r_2 > 0$ ), 这时几何平均产出比等于

$$R_g = (1 + r_1 q)^{P_1} (1 + r_2 q)^{P_2}$$

令  $R_g$  对  $q$  的导数等于 0, 可以求出最优投资比例是

$$q^* = -(P_1 r_1 + P_2 r_2) / r_1 r_2 = E / |r_1 r_2|$$

如果令  $r_1=1$  (即亏了输掉全部下注资金), 则上面公式就变成著名的凯利公式:

$$q^* = P_2 - (1 - P_2) / r_2$$

对于更一般的投资组合。几何平均产出比变为

$$R_g = \prod_{i=1}^n (\sum_{k=0}^m q_k R_{ik})^{P_i}$$

其中  $q_k$  是不同证券上的投资比例,  $i$  表示一组证券的价格矢量的序号,  $R_{ik}$  表示第  $i$  个价格矢量发生时, 第  $k$  种证券的收益。我们记

$$H = \log R_g = \sum_i P_i \log (\sum_{k=0}^m q_k R_{ik})$$

为增值熵, 求使  $H$  达最大的一组  $q_0, q_1, q_2, \dots$  这组投资比例就是最优组合。

和马科维茨理论一致的是,  $G$  理论也强调分散投资降低风险, 特别是利用不同证券之间的反相关性质降低风险。但是不同的是: 1)  $G$  理论把复利或长期累积增值幅度当作客观标准, 而马科维茨理论不然。2)  $G$  理论要求我们预测最大可能亏损幅度和相应的概率, 它力图避免深度亏损和破产; 而马科维茨理论忽视偶然的深度亏损。

### 用破产风险测度取代流行的风险测度 VaR

流行的风险测度是 VaR, 其含义是: 在未来某时段内, 一个投资组合在多大可能 (置信度) 的情况下, 价值损失不超过多少 (VaR 值)。比如, 一个基金在 95% 的情况下, 一天损失不超过 100 万元。VaR 测度的问题是:

1) 在另外 5% 的情况下 (以置信度 95% 为例), 亏损最多达到多少? VaR 测度并不提供。

2) VaR 是根据过去数据统计得到的, 而过去不表示未来。过去见到的天鹅都是白的, 不表明不会出现黑天鹅。2008 年的经济危机就前所未有的。

为此, 我建议用勾股弦公式

$$F^2 + (1 + G)^2 = (1 + E)^2$$

定义风险  $F$ ——它反映收益的波动性和亏损深度。再用  $f=F/(1+E)$  定义破产风险, 它在 0 和 1 之间变化。当  $G=E$  时,  $F=0$ , 破产风险  $f=0$ ; 当  $G \leq -1$  时 (只要有一个价格矢量使得组合亏损超过 100%, 那么不管它发生的概率多么小, 都会有  $G \leq -1$ ), 破产风险  $f=1$ 。有趣的是  $f$  和通信理论中的信噪比很相似<sup>4</sup>。

由于高杠杆交易流行, 一个组合的可能亏损可能很深, 虽然它发生的概率很小, 但是一旦发生, 破坏力极大, 所以不能不防。破产风险测度  $f$  将告诉我们一个投资组合离破产有多远。限定  $f$  在某个范围, 比如  $f < 0.3$ , 便是把投资风险控制在适当范围内。

### 撒谬而森为什么竭力反对凯利公式和 G 理论

1956 年, 贝尔实验室的凯利 (John L. Kelly) 在香农 (Claude E. Shannon) 信息论启发下, 提出了基于复利准则的打赌公式——凯利公式。1967 年, 经济学家拉坦内 (Henry A. Latane) 和塔特尔 (Donald L. Tuttle) 在不知道凯利研究的情况下, 发表文章介绍了类似

<sup>4</sup> 参看: <http://survival99.com/lcg/my/006-tzrl.html>

研究<sup>5</sup>。我是广义信息论研究者<sup>6</sup>，我也受香农理论启发做了类似研究。出书之前我才知道拉坦内和塔特尔的研究，后来我才知道凯利的研究。我的这项研究功劳不大，但是苦劳不少。我研究了许多细节问题，比如考虑资金成本、交易手续费、透支、卖空……时的优化方法和近似快速优化方法；证明了分散投资极限定理，证明了投资容量（最大可能盈利幅度）公式和信道容量公式相似。我还研制了电脑优化模拟程序<sup>7</sup>。

《财富公式》介绍了索普（Edward Thorp）如何实践 G 理论。索普早年和香农一起研究战胜轮盘赌技术，后来利用凯利公式和 21 点战胜赌场，再后来成为私募基金经理人，管理对冲基金，业绩优异。香农本人也是投资高手，其投资成功和 G 理论密切相关。我也是 G 理论的实践者，我的 15 年投资经验也表明 G 理论非常有用<sup>8</sup>。

然而，长期以来，G 理论一直遭受经济学权威萨缪尔森（Paul A. Samuelson）为首的学院派的压制。萨缪尔森甚至在大众面前骂凯利和索普是骗子。当时香农和萨缪尔森同在麻省理工学院，两人关系不错，香农拿萨缪尔森当朋友。而凯利和索普也是香农的朋友。香农得知此事深感奇怪。究竟什么原因，使得学术之争导致人身攻击？萨缪尔森曾在马科维茨理论基础上研究过投资组合问题，结论是非重复投资用马科维茨理论合适，无数次重复投资用复利准则合适。据此，G 理论也应该有其地位。《财富公式》认为，学院派排斥 G 理论似乎是因为它出自科学技术研究者之手，是外来理论。我不这么认为。拉坦内和塔特尔是经济学家，他们发表文章的时候经济学界并不知道凯利公式。他们的研究照样受到压制。索普说，美国长期资本公司的破产和学院派对 G 理论的压制有关。我以为次贷危机也不例外。

联系萨缪尔森为首的学院派和巴菲特关于有效市场理论之争，人身攻击不难理解。有效市场理论认为，市场通常是有效的，证券价格是随机的，不可预测的；我们不可能通过分析公开资料获得有用信息。而巴菲特否定有效市场理论，肯定通过公开资料的研究可以获得有用信息。学院派用过去的波动度量风险，这也遭到巴菲特的嘲笑，他说，我无论如何也不能理解，一个股票跌了一半以后，风险反而变大了。

原来 G 理论和有效市场理论不相容，而和巴菲特的做法是一致的（《财富公式》也肯定了这一点）。最近出版的巴菲特传记，其书名是《滚雪球》，滚雪球正是复利准则的生动写照。而萨缪尔森等人靠有效市场理论赢得了诺贝尔奖。马科维茨理论采用正态分布假设，这正好符合证券价格的随机漫步理论。而 G 理论要求预测最坏情况，它根据未来可能的跌幅度量风险，这些都和有效市场理论格格不入。《财富公式》说，萨缪尔森居然买了巴菲特管理的伯克希尔公司的股票。这也令人奇怪。可见，一个权威为了维护其权威，他相信的和他说说的可能真的不一样。

---

<sup>5</sup> 参看：Latane, H. A. and Tuttle D. L. Criterion for portfolio building, *The Journal of Finance*, **22**, 3(1967), 359—373

<sup>6</sup> 参看：鲁晨光《广义信息论》，中国科学技术大学出版社，1993

<sup>7</sup> 参看：<http://survival99.com>

<sup>8</sup> 参看我管理的实验基金记录：<http://survival99.com/xcz/fund>