

自动控制原理第9讲

根轨迹概念与根轨迹 绘制（上）

邹斌

单位：上海大学 机电工程与自动化学院

地址：上海市延长路**149**号

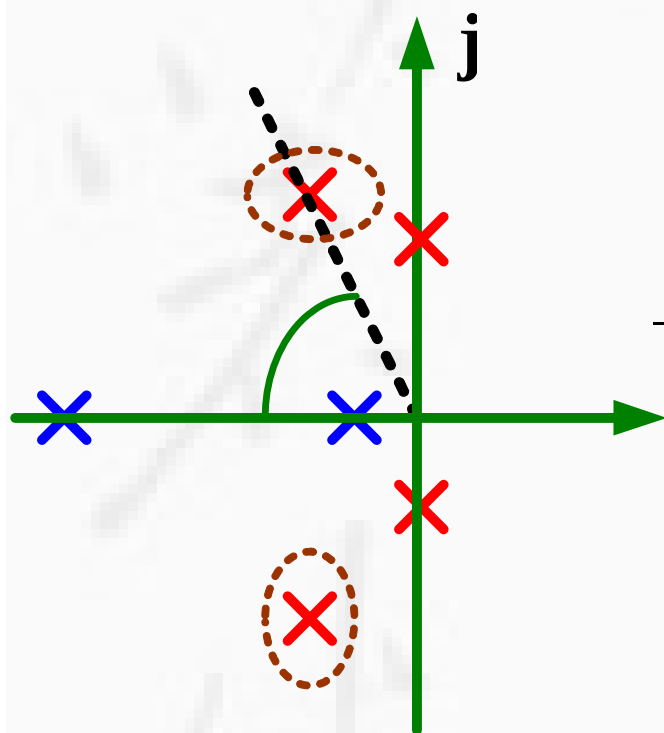
电子邮件：**zoubin@shu.edu.cn**

电话：**13122601880**

问题的提出

❖ 闭环极点决定了控制系统的基本特性!

❖ 控制系统的闭环极点不任意求得!



■ 闭环极点（特征根）决定了控制系统稳定性;

■ 闭环极点（特征根）决定了控制系统的模态; 确定了系统的动态性能

根轨迹 定义

- 根轨迹的根是闭环特征根
- 轨迹是闭环特征根随着参数变化而变化的轨迹！

- **根轨迹**：当系统某一参数在规定范围内变化时，相应的系统**闭环特征方程根**在 s 平面上的位置也随之变化移动，一个根形成一条轨迹。
- **狭义根轨迹**（通常情况）：变化参数为开环增益 K ，且其变化取值范围为 0 到 ∞ 。
- **广义根轨迹**：系统的任意一变化参数形成根轨迹。

根轨迹的例子

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad \Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

$$D(s) = s^2 + s + K = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1-4K}$$

$$K=0 \text{ 时 } s_1 = 0 \quad s_2 = -1$$

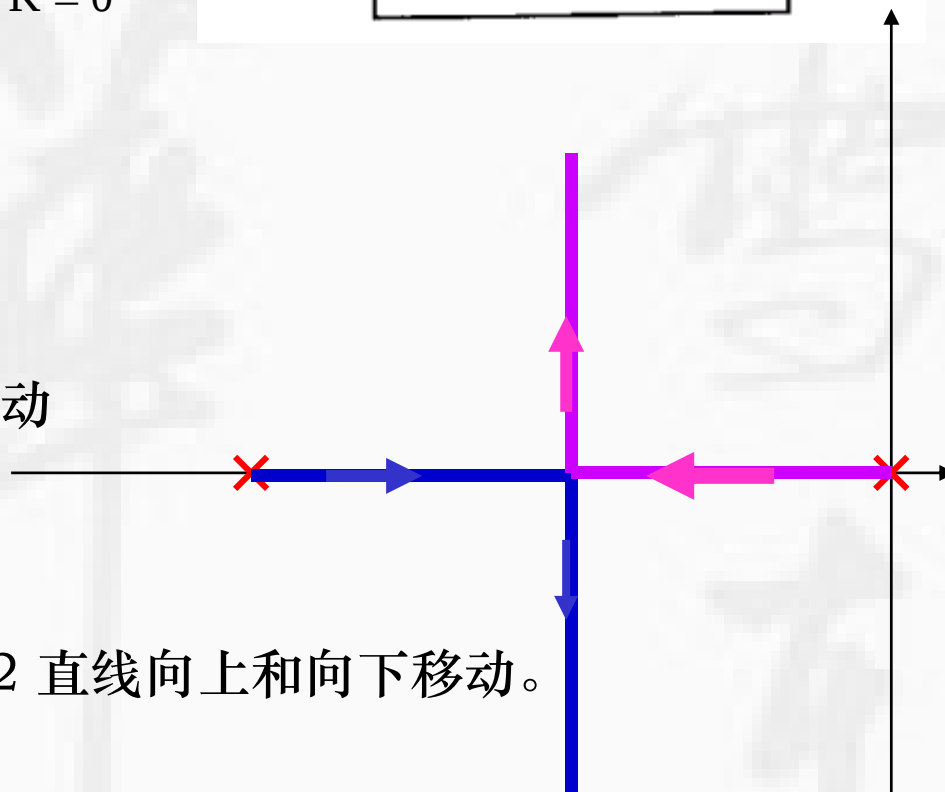
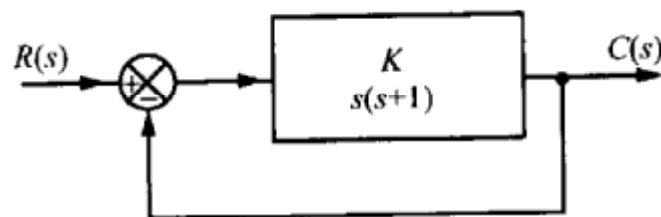
$0 < K < 1/4$ 两个负实根

K 值增加 相对靠近移动

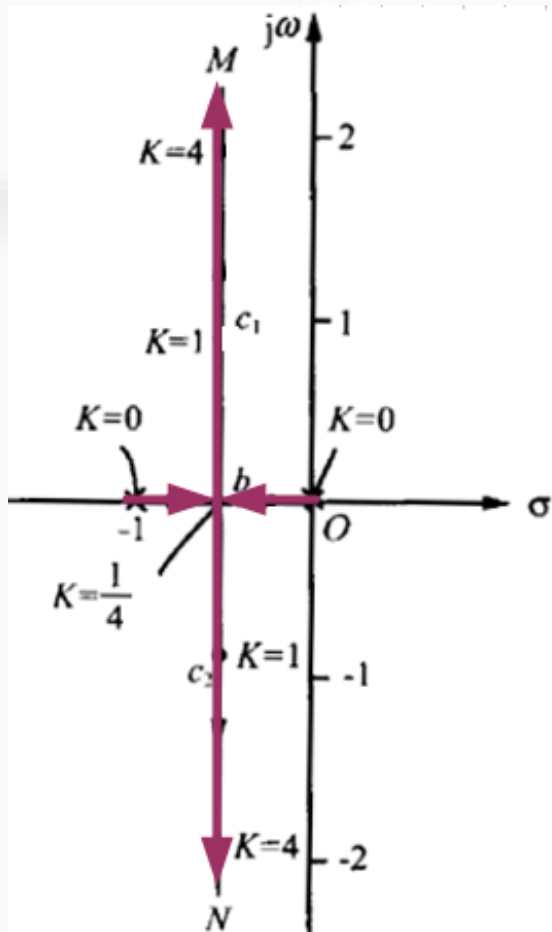
$$K=1/4 \quad s_1 = s_2 = -1/2$$

$1/4 < K < \infty$ 一对共轭复根

离开负实轴，分别 $s=-1/2$ 直线向上和向下移动。



根轨迹与系统性能



从根轨迹看系统的动态性能

□ 是否有虚根考察系统是否振荡

□ 主导极点的 β 角观察超调量，主导极点离虚轴距离考察调节时间

从根轨迹看系统的稳定性

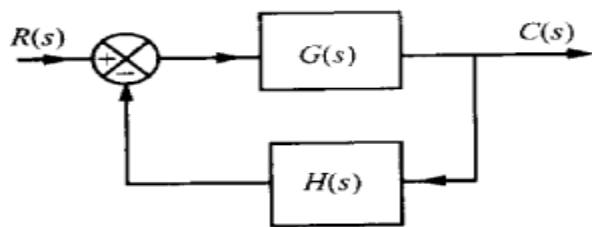
根轨迹是否进入s平面的右半平面？

从根轨迹看系统的稳态性能

系统的型号？

根轨迹方程就是闭环特征方程！

根轨迹方程



$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

根轨迹方程 $G(s)H(s) = -1$



$$G(s)H(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

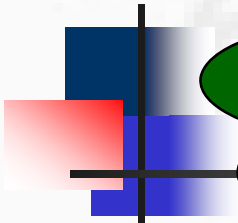
m 个零点
 n 个极点
($n \geq m$)

幅值条件 $K' \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1$

- 1) 幅值条件不但与开环零、极点有关，还与开环根轨迹增益有关；
- 2) 必要条件

幅角条件 ($k=0, 1, 2, \dots$)
$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2k + 1)\pi$$

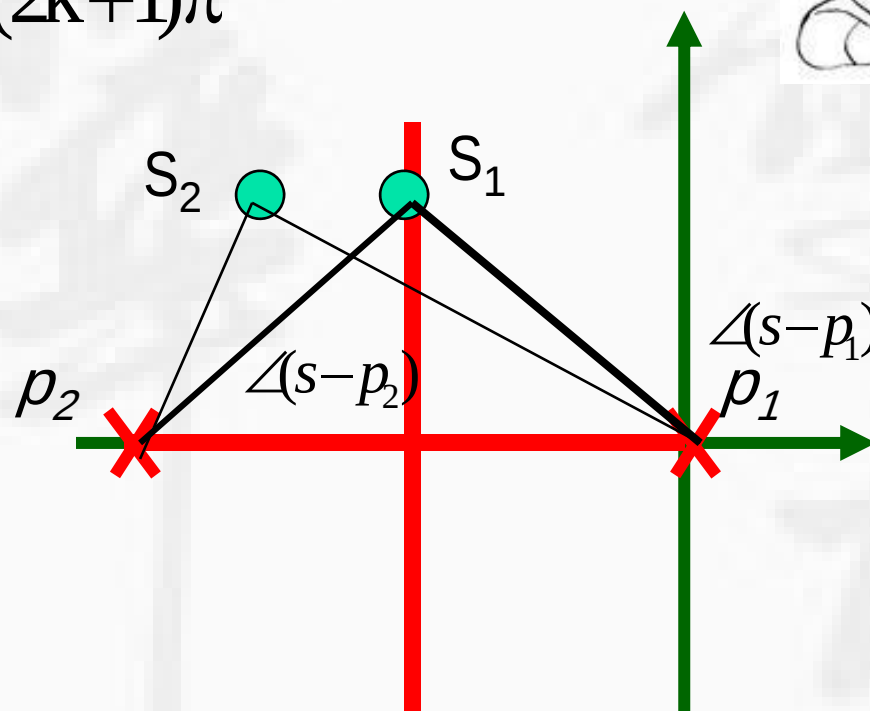
- 1) 幅角条件只与开环零、极点有关
- 2) 充要条件

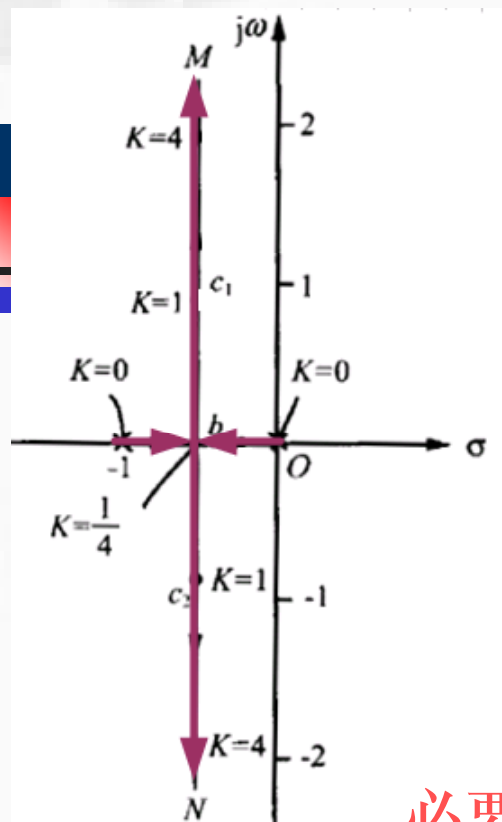


凡是满足幅角条件的点
一定是根轨迹上的点!

幅角条件 ($k=0,1,2, \dots$)

$$\sum_{i=1}^m \angle(s-z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) = \pm(2k+1)\pi$$





幅值条件是必要条件

幅值条件 $\frac{K}{|s| \cdot |s+1|} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} s = -2 \quad \text{不是根轨迹上的一点} \\ s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{根轨迹上的一点} \end{array} \right\} \begin{array}{l} K=2 \\ \text{幅值条件成立!} \end{array}$$

必要条件:

S 平面上的某一点 s 是根轨迹上的点, 则幅值条件成立;

S 平面上的任一点 s 满足幅值条件, 该点却不一定是根轨迹上的点。

幅角条件绘制根轨迹，幅值条件定K值

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1)} = \frac{K'(s + 1/\tau)}{s(s + 1/T_1)(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

$$K' = K\tau / T_1 T_2^2$$

$$\omega_n = 1/T_2 \quad \omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} / T_2$$

开环极点 (“ $\times$ ”) $p_1 = 0$ $p_2 = -1/T_1$ $p_{3,4} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$

开环零点 (“ $\circ$ ”) $z_1 = -1/\tau$

如果幅角条件成立，则 s_1 即根轨迹上的一个点。

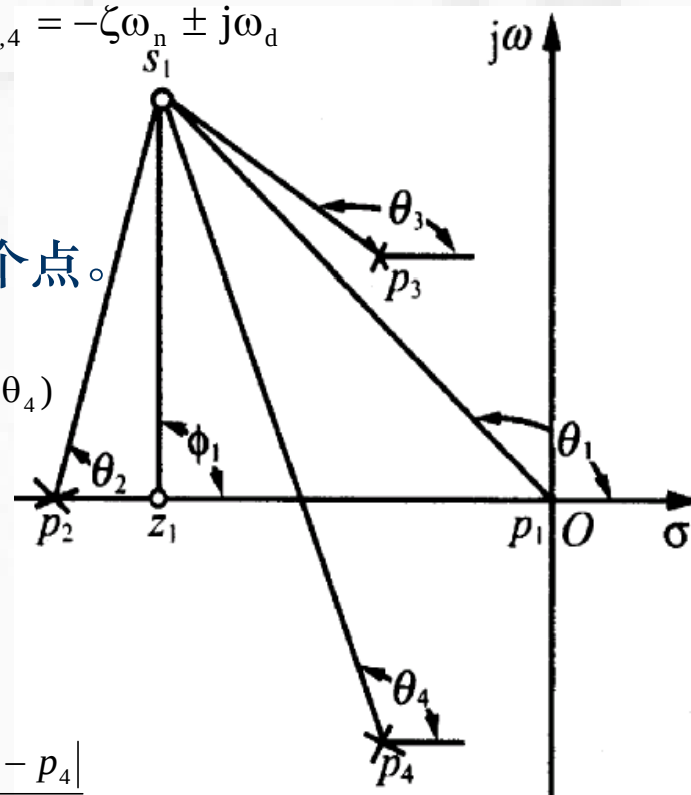
$$\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{i=1}^1 \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^4 \angle(s - p_i) = \phi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

ϕ_1 开环零点至 s_1 的幅角

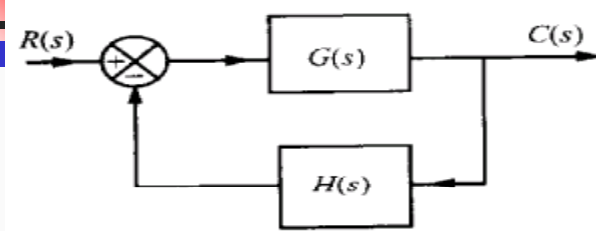
θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 ：开环极点至 s_1 的幅角。

由幅值条件 $\Longrightarrow K' = \frac{|s_1| \cdot |s_1 - p_2| \cdot |s_1 - p_3| \cdot |s_1 - p_4|}{|s_1 - z_1|}$

!!幅角均以反时针方向进行。



开环零极点与闭环零极点



$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_G \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j)}{\prod_{i=1}^q (s - p_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j) + K' \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^l (s - z_j)}$$

$$G(s) = \frac{K_G (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + \xi_2 \tau_2 s + 1) \cdots}{s^v (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + \zeta_2 T_2 s + 1) \cdots} = K_G' \frac{\prod_{i=1}^f (s - z_i)}{\prod_{i=1}^q (s - p_i)}$$

前向通道增益

前向通道根轨迹增益

$$K_G' = K_G \frac{\tau_1 \tau_2^2 \cdots}{T_1 T_2^2 \cdots}$$

反馈通道根轨迹增益

开环系统根轨迹增益

$$H(s) = K_H' \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

$$K' = K_G' K_H'$$

m个零点(m=f + 1)

n个极点(n= q + h)

$$G(s)H(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{i=1}^q (s - p_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

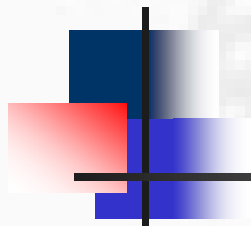
m个零点(m=f + 1)

z_i 前向通道零点 z_j 反馈通道零点

n个极点(n= q + h)

p_i 前向通道极点 p_j 反馈通道极点

开环零极点与闭环零极点



$$\Phi(s) = \frac{K_G' \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j)}{\prod_{i=1}^q (s - p_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j) + K' \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^l (s - z_j)}$$

- 1) 闭环系统的零点=前向通道的零点+反馈通道的极点;
- 2) 闭环系统的极点与开环系统的极点、零点以及根轨迹增益均有关;
- 3) 闭环系统根轨迹增益=开环系统前向通道的根轨迹增益。

单位反馈系统

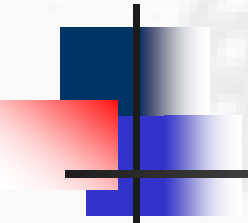
(1) 闭环系统的根轨迹增益就等于开环系统的根轨迹增益;

(2) 闭环系统的零点就是开环系统的零点。

$$K' = K_G' K_H'$$

! 根轨迹法: 由开环系统的零点和极点, 不通过解闭环特征方程找出闭环极点。

二、绘制根轨迹的基本规则



一、根轨迹的起点和终点

二、根轨迹分支数

三、根轨迹的连续性和对称性

四、实轴上的根轨迹

五、根轨迹的渐近线

六、根轨迹的分离点

七、根轨迹的起始角和终止角

八、根轨迹与虚轴的交点

九、闭环特征方程根之和与根之积

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点

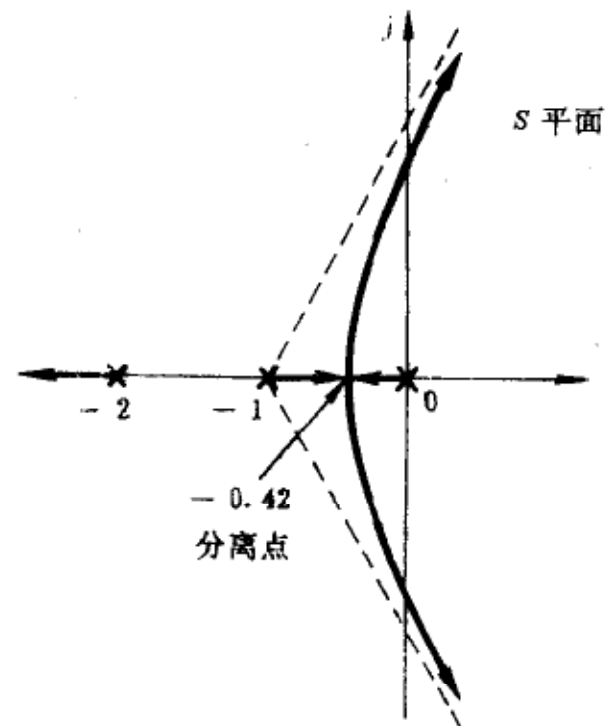
幅值条件 $K' = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$

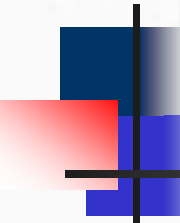
$K' = 0$ s 值必须趋近于某个开环极点

$K' = \infty$ s 值必须趋近于某个开环零点

→ 根轨迹起始于开环极点

→ 根轨迹终止于开环零点



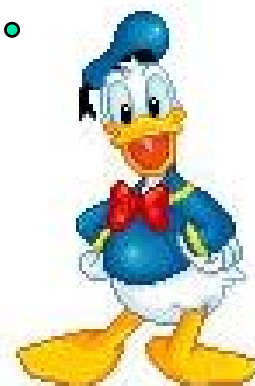
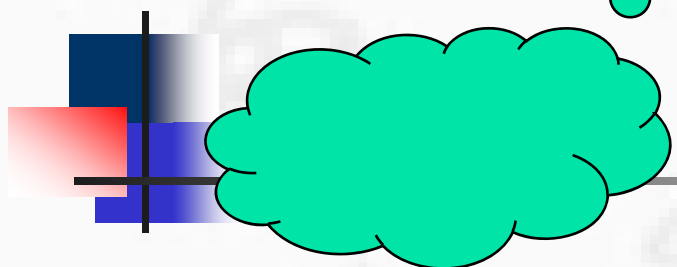


**n阶系统，根轨迹有n个起始点，
→系统根轨迹有n个分支**

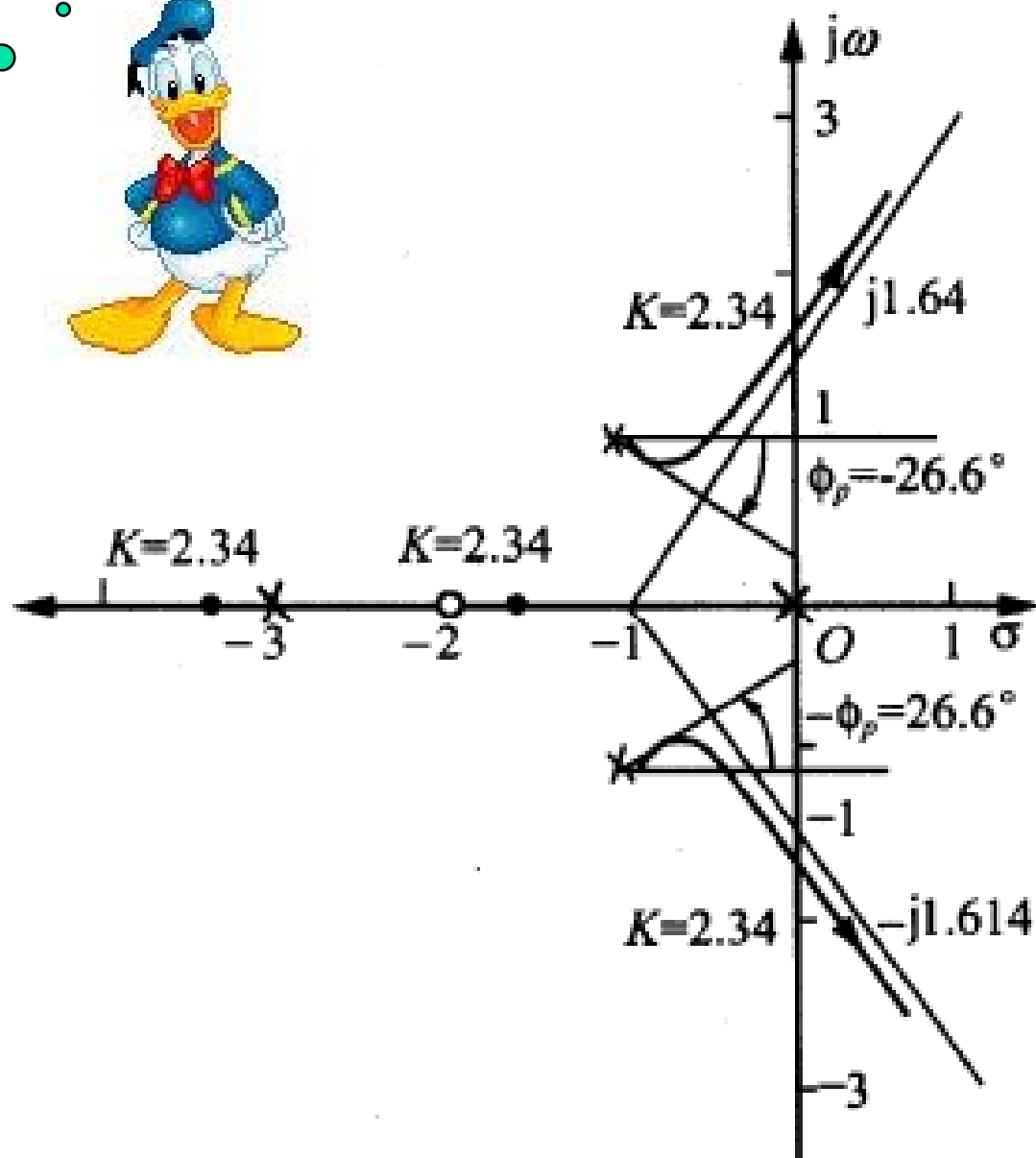
**1) 系统特征方程的阶次为n次→特征方程有n个根
K变化(0到 ∞), n个根随着变化→n条根轨迹。**

**2) 实际物理系统，开环极点一般多于开环零点，
即 $n > m$ 。**

- m 条终止于开环零点（有限值零点）；**
- $(n-m)$ 条根轨迹分支终止于 $(n-m)$ 个无限远零点。**



几阶系统？
几条根轨迹？
从哪里出发？
终止于何处？

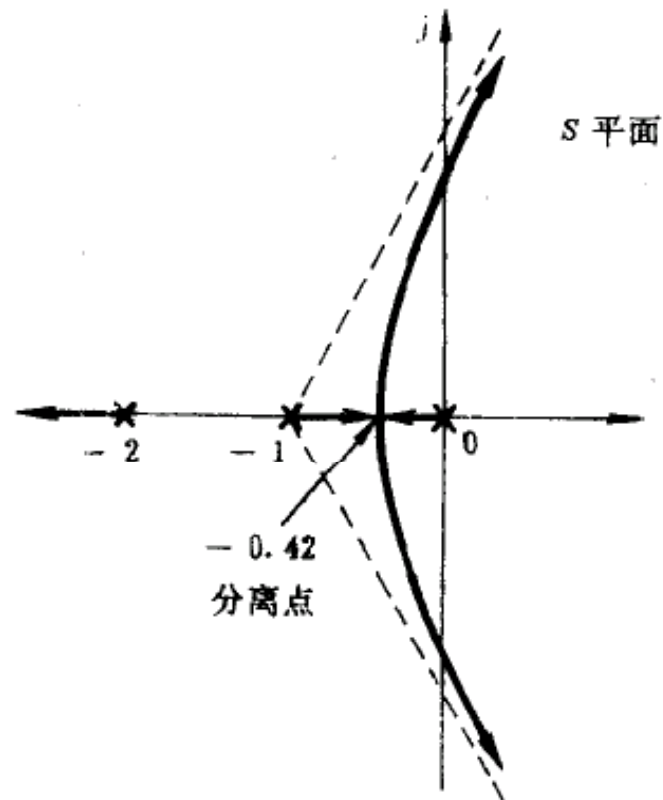


根轨迹是连续曲线，且对称于实轴。

闭环特征方程的根在开环零极点已定的情况下：

- ✓ 各根分别是 K 的连续函数；
- ✓ 特征方程的根为实根或共轭复数根。

仅需先画出 S 平面上半部和实轴上的根轨迹，下半部由镜象求得。



如果实轴上某一区段的右边的实数开环零点、极点个数之和为奇数，则该区段实轴必是根轨迹。

开环零点： z_1 开环极点： p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 、 p_5

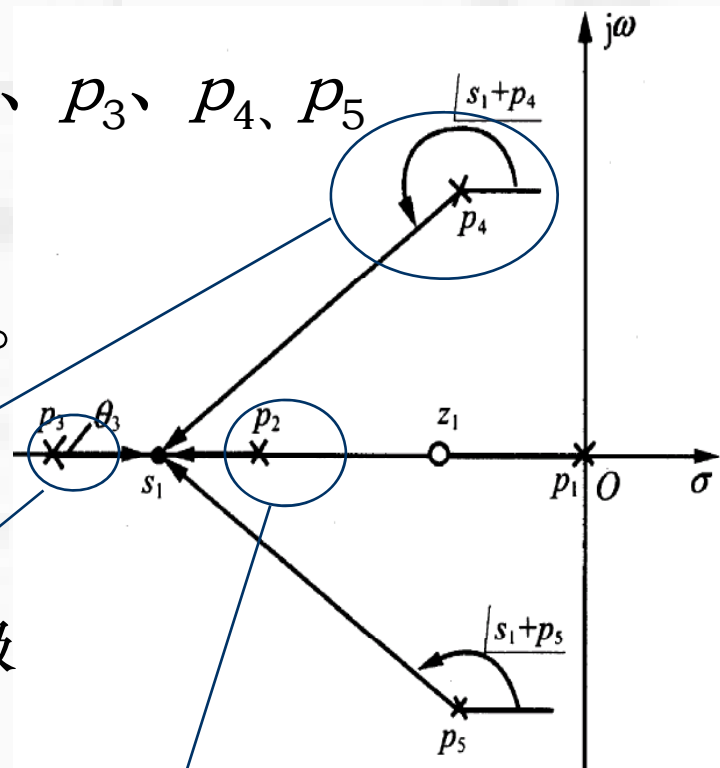
$$\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{i=1}^1 \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^5 \angle(s - p_i)$$

? $\Leftrightarrow \angle G(s_1)H(s_1) = \pm(2k+1)180^\circ$

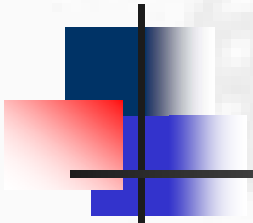
每对共轭复数极点所提供的幅角之和为 360° ；

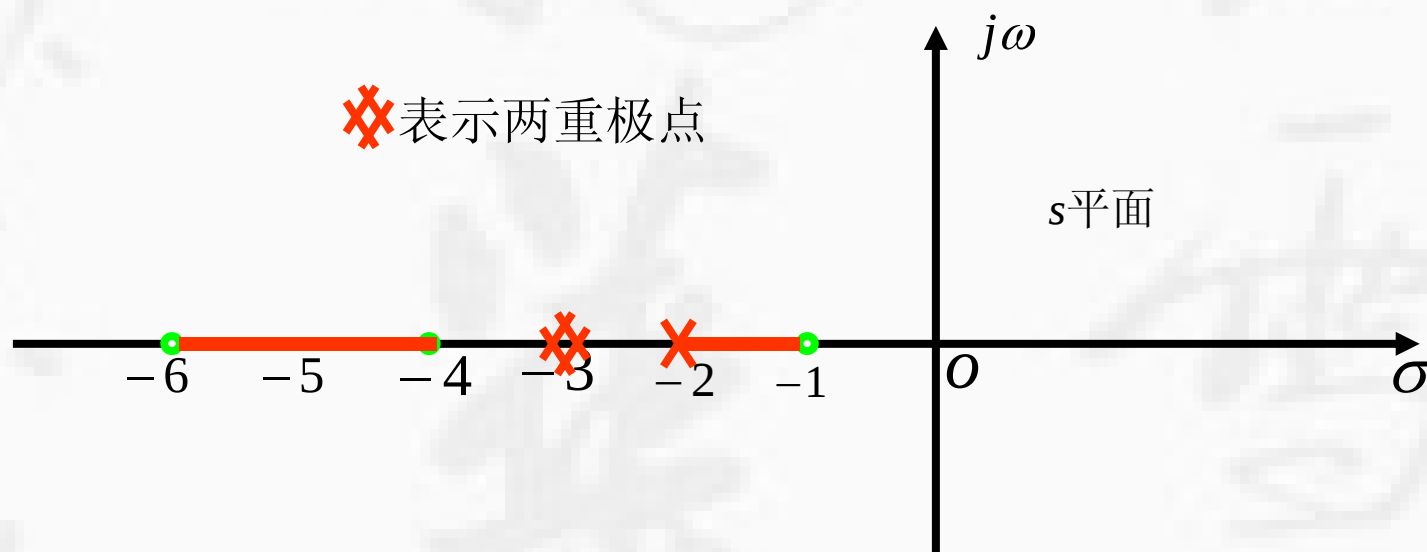
s_1 右边所有位于实轴上的每一个极点或零点所提供的幅角为 180° ；

s_1 左边所有位于实轴上的每一个极点或零点所提供的幅角为 0° 。



已知系统的开环传递函数，试确定实轴上的根轨迹。


$$G(s) = \frac{K(s+1)(s+4)(s+6)}{s^2(s+2)(s+3)^2}$$



$[-1, -2]$ 右侧实零、极点数=3。

$[-4, -6]$ 右侧实零、极点数=7。

五、根轨迹的渐近线

沿着渐近线趋于无限远处，

渐近线也对称于实轴（包括与实轴重合）。

渐近线与实轴的倾角（ $k=0, 1, 2, \dots$ ）：

$$\phi_a = \frac{\pm (2k + 1)180^\circ}{n - m}$$

渐近线与实轴交点的坐标值：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

证明

$$G(s)H(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K' \frac{s^m + \left(-\prod_{i=1}^m z_i\right)s^{m-1} + \dots}{s^n + \left(-\prod_{i=1}^n p_i\right)s^{n-1} + \dots} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{s^n + \left(-\prod_{i=1}^n p_i\right)s^{n-1} + \dots}{s^m + \left(-\prod_{i=1}^m z_i\right)s^{m-1} + \dots} = -K'$$

长除法 $\rightarrow s^{n-m} + \left(-\prod_{i=1}^n p_i + \prod_{i=1}^m z_i\right)s^{n-m-1} + \dots = -K'$ $K' \rightarrow \infty$ 时, $s \rightarrow \infty$, 取前两项

改写为模和相角的形式 $s^{n-m} + \left(-\prod_{i=1}^n p_i + \prod_{i=1}^m z_i\right)s^{n-m-1} = K' e^{j(2k+1)\pi}$

两边开 $(n-m)$ 次方
$$s \left(1 + \frac{-\prod_{i=1}^n p_i + \prod_{i=1}^m z_i}{s} \right)^{\frac{1}{n-m}} = K' \cdot \frac{1}{n-m} \cdot e^{\frac{j(2k+1)\pi}{n-m}}$$

牛顿二项式定理展开, 由于 $s \rightarrow \infty$, 忽略分母为 s 的二次幂和二次幂以上各项

$$s \left(1 + \frac{1}{n-m} \frac{-\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^m z_i}{s} \right) = K' \cdot \frac{1}{n-m} \cdot e^{\frac{j(2k+1)\pi}{n-m}} \Leftrightarrow s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} + K' \cdot \frac{1}{n-m} \cdot e^{\frac{j(2k+1)\pi}{n-m}} = \sigma_a + K' \cdot \frac{1}{n-m} \cdot e^{j\phi_a}$$

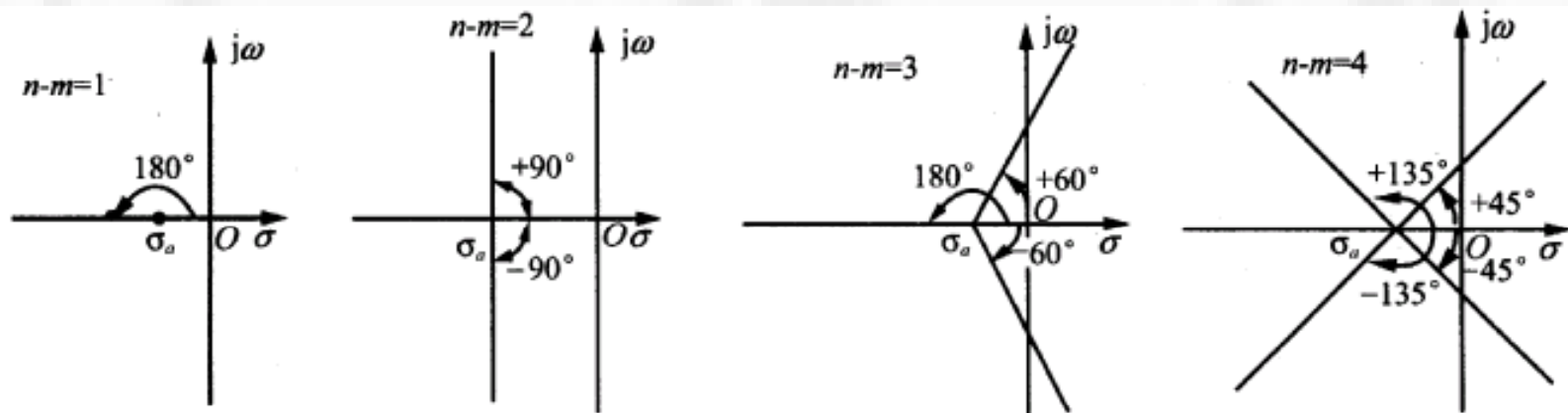
$$\phi_a = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{n-m} \quad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

说明

$$\phi_a = \frac{\pm (2k + 1)180^\circ}{n - m}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

- 1) 当 k 值取不同值时, ϕ_a 有 $(n-m)$ 个值, 而 σ_a 不变;
- 2) 根轨迹在 $s \rightarrow \infty$ 时的渐近线为
 $(n-m)$ 条与实轴交点为 σ_a 、倾角 ϕ_a 为的一组射线。



根轨迹的渐近线例一

已知系统的开环传递函数，试确定根轨迹的渐近线。

$$G(s) = \frac{K(0.25s + 1)}{s(s + 1)(0.2s + 1)} = \frac{K'(s + 4)}{s(s + 1)(s + 5)}$$

三个开环极点：0、-1、-5 一个开环零点：-4

$$n - m = 3 - 1 = 2$$

渐近线与实轴交点：
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{(0) + (-1) + (-5) - (-4)}{3 - 1} = -1$$

渐近线与实轴正方向的夹角：

$$\phi_a = \frac{\pm (2k + 1)180^\circ}{n - m} \quad \phi_a = 90^\circ, 270^\circ$$

根轨迹的渐近线例二

已知系统的开环传递函数，试确定根轨迹的渐近线。

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

四个开环极点：0、-1+j、-1-j、-4

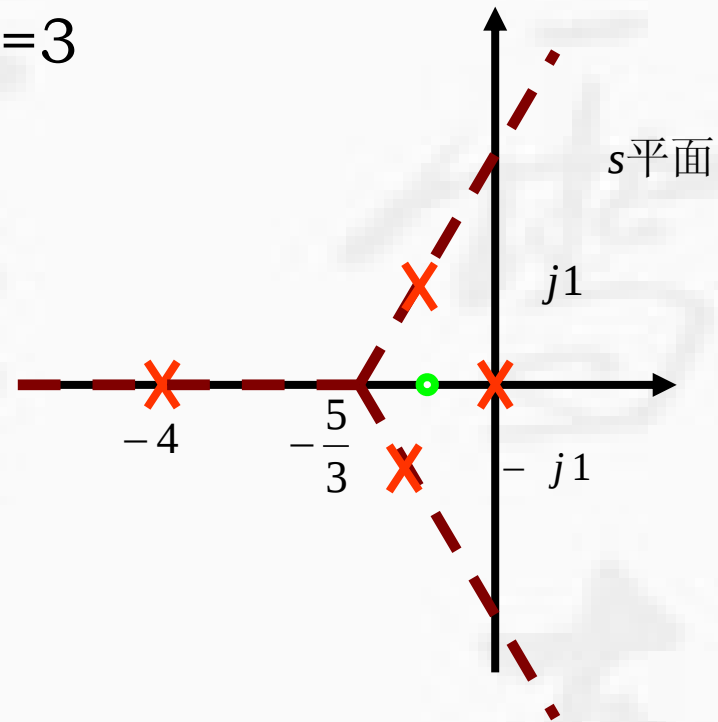
一个开环零点：-1 $n-m=4-1=3$

渐近线与实轴交点：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{(0) + (-1+j) + (-1-j) + (-4) - (-1)}{4-1} = -\frac{5}{3}$$

渐近线与实轴正方向的夹角：

$$\phi_a = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{n-m} \quad \phi_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$



六、根轨迹的分离点

分离点（或会合点）：根轨迹在S平面某一点相遇后又立即分开。

分离点必然是为D(s)某一数值时的**重根点**。

1、 σ_b 坐标值由分式方程解出

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_b - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_b - p_j}$$

2、由极值点求解 σ_b

$$D(s, K') = 0 \rightarrow K'(s) = 0$$

$$\text{坐标值由 } \frac{dK'}{ds} = 0 \text{ 解出 } \sigma_b$$

$$K' = K = 1/4$$

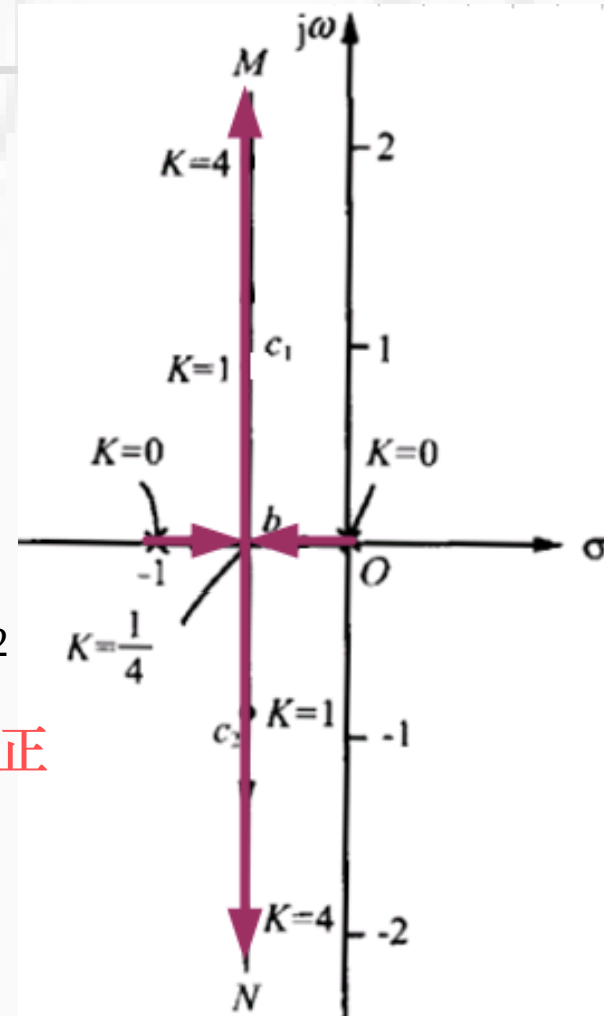
$$s_1 = s_2 = -1/2$$

必要条件：当解得多个s值时，其中k' 值为正实数时才有效。

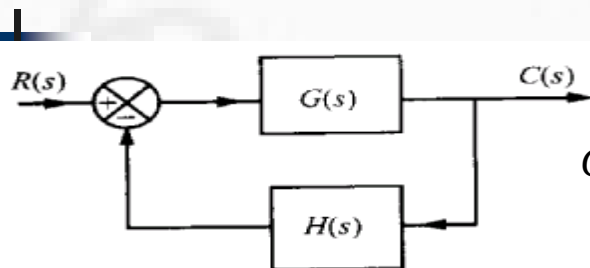
3、重根法求解 σ_b

$$D(s, K') = A(s) + K'B(s) \rightarrow K' = -\frac{A(s)}{B(s)}$$

$$\text{由 } B(s) \frac{dA(s)}{ds} - A(s) \frac{dB(s)}{ds} = 0 \text{ 解出 } \sigma_b$$



σ_b 坐标值由分式方程解出



$$G(s)H(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad D(s) = \prod_{j=1}^n (s - p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

根轨迹在 S 平面上相遇并有重根，设重根为 s_1 ，根据代数中的重根条件，有

$$\left\{ \begin{array}{l} D(s_1) = \prod_{j=1}^n (s_1 - p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s_1 - z_i) = 0 \\ \frac{d}{ds_1} D(s_1) = \frac{d}{ds_1} \left[\prod_{j=1}^n (s_1 - p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s_1 - z_i) \right] = 0 \end{array} \right. \quad \text{或} \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{j=1}^n (s_1 - p_j) = -K' \prod_{i=1}^m (s_1 - z_i) \\ \frac{d}{ds_1} \left[\prod_{j=1}^n (s_1 - p_j) \right] = -K' \frac{d}{ds_1} \left[\prod_{i=1}^m (s_1 - z_i) \right] \end{array} \right.$$

两式相除

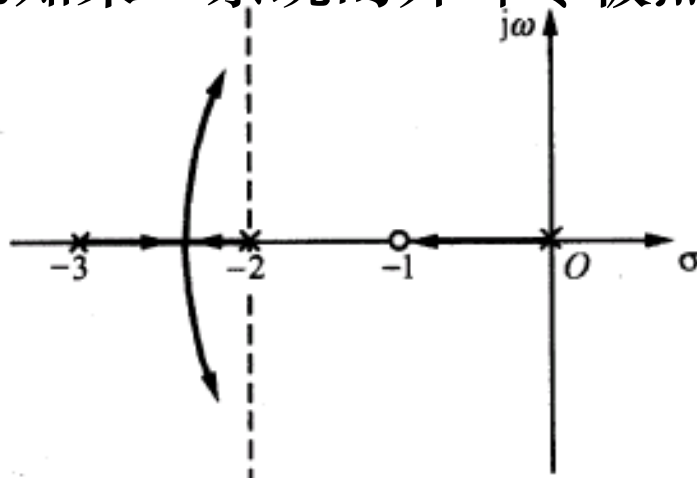
$$\frac{\frac{d}{ds_1} \left[\prod_{j=1}^n (s_1 - p_j) \right]}{\prod_{j=1}^n (s_1 - p_j)} = \frac{\frac{d}{ds_1} \left[\prod_{i=1}^m (s_1 - z_i) \right]}{\prod_{i=1}^m (s_1 - z_i)}$$

$$\frac{d}{ds_1} \ln \left[\prod_{j=1}^n (s_1 - p_j) \right] = \frac{d}{ds_1} \ln \left[\prod_{i=1}^m (s_1 - z_i) \right] \quad \text{或} \quad \sum_{j=1}^n \frac{d}{ds_1} \ln(s_1 - p_j) = \sum_{i=1}^m \frac{d}{ds_1} \ln(s_1 - z_i)$$

即得
$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s_1 - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_1 - p_j}$$

解出 s_1 ，即为分离点 σ_b

已知某一系统的开环零极点分布，试概略画出其根轨迹。



规则1、2、3→

根轨迹有三条分支，分别起始于开环极点0、-2、-3，终止于一个开环有限零点-1和二个无限零点。
根轨迹对称于实轴。

规则4→实轴上0到-1和-2到-3两个区域段为根轨迹

规则5→根轨迹有两条渐近线 ($n-m=2$), 令 $k=0$

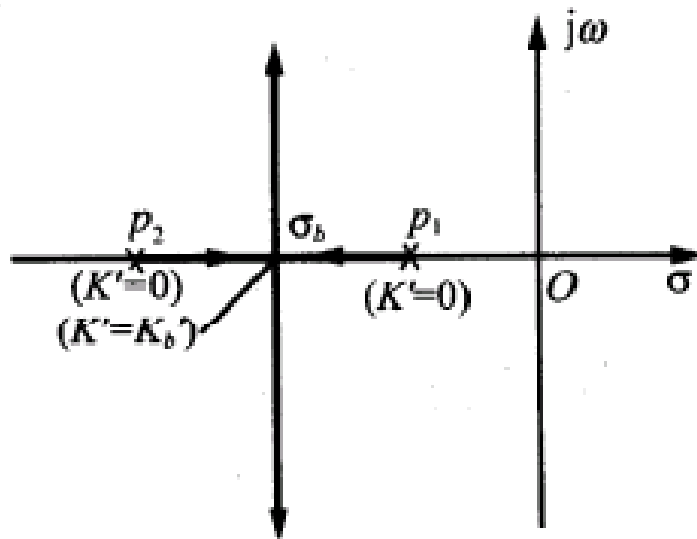
$$\phi_a = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ}{2} = \pm 90^\circ \quad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0 + (-2) + (-3) - (-1)}{2} = -2$$

规则6→在实轴上有根轨迹分离点，且在区段-2到-3之间

$$\frac{1}{\sigma_b+1} = \frac{1}{\sigma_b-0} + \frac{1}{\sigma_b+2} + \frac{1}{\sigma_b+3} \quad \sigma_b = -2.47 \quad \phi_b = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

由极值点求解 σ_b

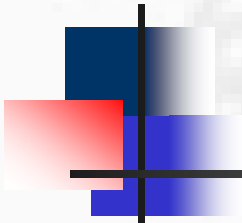
假定 s 点沿实轴自 p_2 点移向 p_1 点， k' 增益：从零开始逐渐增大，到达 σ_b 点时为最大，逐渐减小，到 p_1 点时 k' 为零。



→根轨迹分离点处所对应的 k' 增益具有极值

$$\frac{dK'}{ds} = \frac{d}{ds} \left(- \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)} \right) = 0$$

?! 取在根轨迹上的解。


$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

由极值点求解

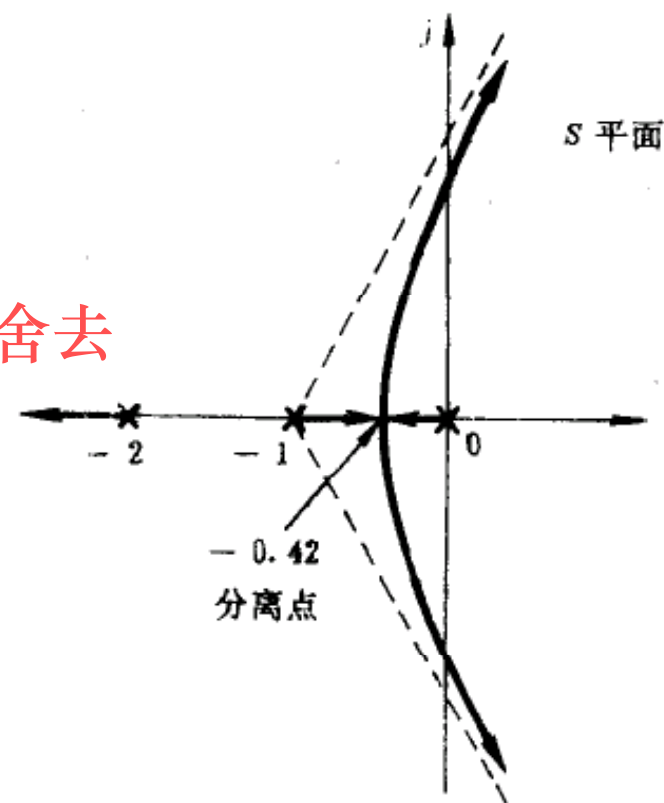
$$s_1 = -0.42$$

$$s_2 = -1.58$$

[-1, -2]区间无根轨迹→舍去

$$\sigma_b = -0.42$$

$$\phi_b = \frac{180^\circ}{1} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



r重根

$$K' = -\frac{A(s)}{B(s)}$$

$$D(s) = D(s, K') = A(s) + K'B(s) = (s - \sigma_b)^r D_1(s) = 0$$

两边求导

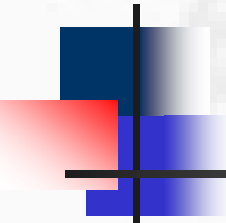
$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{dA(s)}{ds} + K' \frac{dB(s)}{ds} = (s - \sigma_b)^{r-1} [rD_1(s) + (s - \sigma_b) \frac{dD_1(s)}{ds}] = 0$$

$$r > 1 \rightarrow \frac{dD(s)}{ds} \text{ 含 } (s - \sigma_b)^{r-1}$$

$$\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=\sigma_b} = \left[\frac{dA(s)}{ds} + K' \frac{dB(s)}{ds} \right]_{s=\sigma_b} = 0$$

$$B(s) \frac{dA(s)}{ds} - A(s) \frac{dB(s)}{ds} = 0 \implies \sigma_b$$

必要条件：!!当解得多个s值时，其中k' 值为正实数时才有效。



分离点（或会合点）处的根轨迹的会合角 （或分离角）

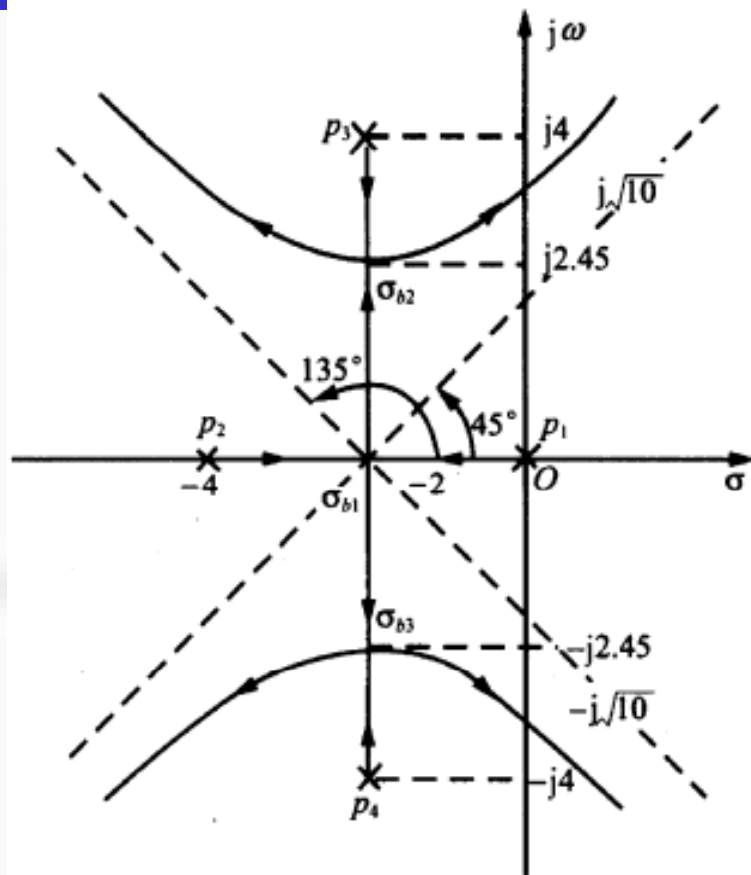
$$\phi_b = \frac{\pm (2k + 1)\pi}{1}$$

会合（或分离）的
根轨迹的条数

分离点上的根轨迹的切线方向与实轴正方向的夹角

例

$$G(s)H(s) = \frac{K'}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$



规则1、2、3、4 →

根轨迹对称于实轴，

有四条根轨迹分支，分别起始于极点0，-4和 $-2 \pm j4$ ，终止于无限远零点。

实轴上0~-4区段为根轨迹。

辐角条件 → p_3 、 p_4 的连接线为根轨迹

$$\angle(s - p_1) + \angle(s - p_2) \equiv \pi$$

$$\angle(s - p_4) \equiv \pi$$

$$\angle(s - p_3) \equiv -\pi$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2k+1)\pi$$

$$G(s)H(s) = \frac{K'}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

根据规则5→ 根轨迹有四条渐近线

$$\phi_a = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{n-m} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0 + (-4) + (-2) + (-2)}{4} = -2$$

根据规则6→ 求根轨迹的分离点

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K'}{s(s+4)(s^2+4s+20)} = 0$$

$$K' = -s(s+4)(s^2+4s+20) = -(s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s)$$

$$\frac{dK'}{ds} = -(4s^3 + 24s^2 + 72s + 80) = 0$$

$$\sigma_{b1} = -2$$

$$\sigma_{b2,3} = -2 \pm j2.45$$

p3、p4的连接线上

