

自动控制原理第10讲 根轨迹概念与根轨迹 绘制（下）

邹斌

单 位：上海大学 机电工程与自动化学院

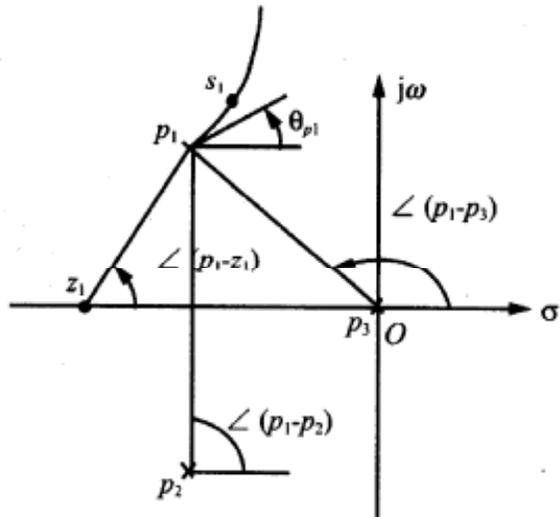
地 址：上海市延长路149号

电子邮件：zoubin@shu.edu.cn

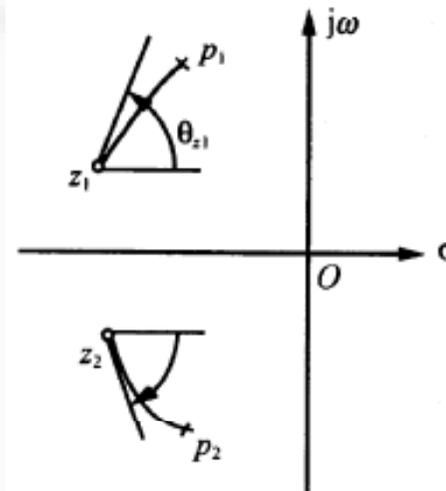
电 话：13122601880

七、根轨迹的起始角和终止角

起始角 ϕ_p :从开环复数极点出发的一支根轨迹,在该极点处根轨迹的切线与实轴之间的夹角。



终止角 ϕ_z :进入开环复数零点处根轨迹的切线与实轴之间的夹角。



根轨迹起始角的一般计算式($0 \sim 360^\circ$)

$$\angle\phi_{p_j} = \pm(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \angle(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \angle(p_j - p_i)$$

$k=0, 1, \dots$

根轨迹终止角一般计算式($0 \sim 360^\circ$)

$$\angle\phi_{z_j} = \pm(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^n \angle(z_j - p_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \angle(z_j - z_i)$$

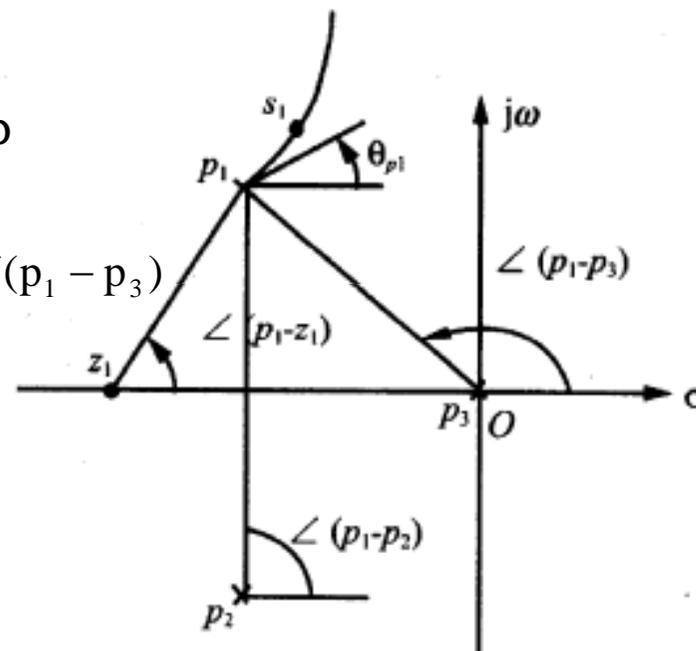
根轨迹上，靠近起点 p_1 处取一点 s_1

相角方程

$$\angle(s_1 - z_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) = \pm(2k + 1)\pi$$

$s_1 \rightarrow p_1$ $\angle(s_1 - p_1) \rightarrow$ 起始角 ϕ_p

$$\angle\phi_{p1} = \pm(2k + 1)\pi + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3)$$



四条分支

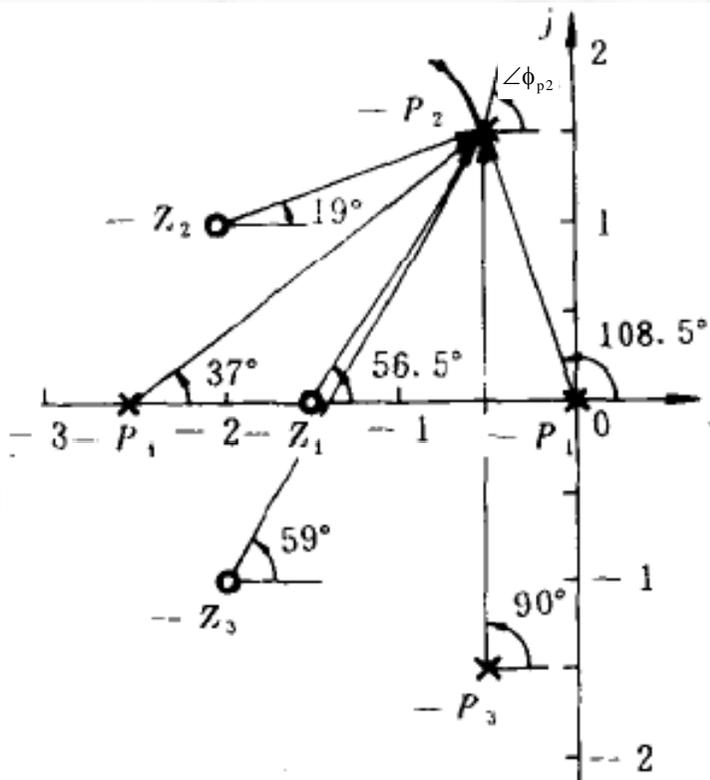
$$G(s)H(s) = \frac{K'(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+j1.5)(s+0.5-j1.5)}$$

起始点 $p_1 = 0$ 、

$p_{2,3} = -0.5 + j1.5$ 、 $p_4 = -2.5$

终止点 $z_1 = -1.5$ 、 $z_{2,3}$
 $= -2 \pm j$ 、 $-\infty$

实轴上 $0 \sim -1.5$ 和 $-2.5 \sim -\infty$
 两区段是根轨迹

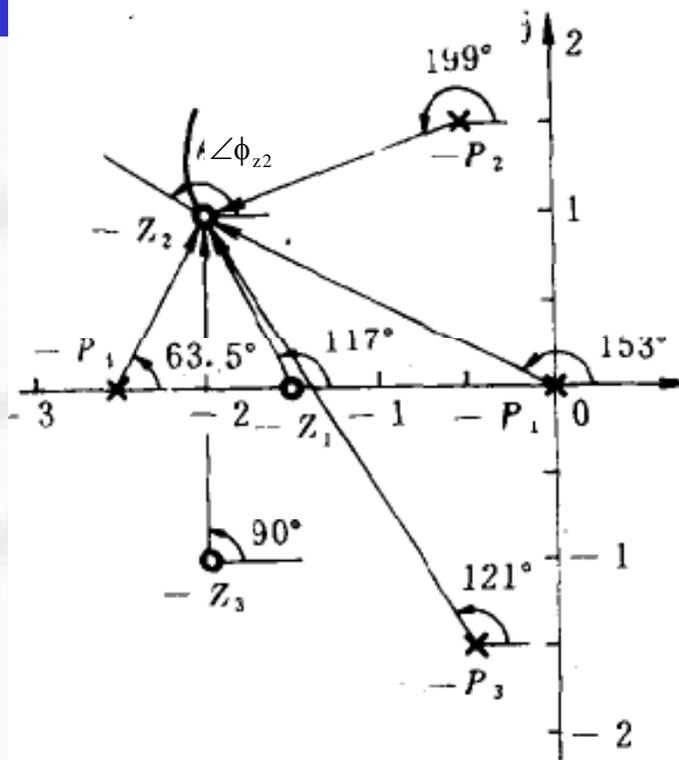


$$\begin{aligned} \angle\phi_{p_2} &= \pm(2k+1)\pi + \angle(p_2 - z_1) + \angle(p_2 - z_2) + \angle(p_2 - z_3) \\ &\quad - \angle(p_2 - p_1) - \angle(p_2 - p_3) - \angle(p_2 - p_4) \\ &= \pm(2k+1)\pi + 56.5^\circ + 19^\circ + 59^\circ - 108.5^\circ - 90^\circ - 37^\circ \end{aligned}$$

取 $k=0$ $\angle\phi_{p_2} = 79^\circ$

p_3 和 p_2 为共轭复数，
 根轨迹起始角对称。

$\angle\phi_{p_3} = -79^\circ$ 或 $\angle\phi_{p_3} = 360^\circ - 79^\circ = 281^\circ$



$$\begin{aligned} \angle \phi_{z_2} &= \pm(2k+1)\pi + \angle(z_2 - p_1) + \angle(z_2 - p_2) + \\ &\angle(z_2 - p_3) + \angle(z_2 - p_4) - \angle(z_2 - z_1) - \angle(z_2 - z_3) \\ &= \pm(2k+1)\pi + 153^\circ + 199^\circ + 121^\circ + 63.5^\circ - 117^\circ - 90^\circ \end{aligned}$$

取 $k=1$ $\angle \phi_{z_2} = 149.5^\circ$

z_2 和 z_3 为共轭复数，
根轨迹终止角对称。

$$\angle \phi_{z_3} = -149.5^\circ$$

八、根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴相交 \rightarrow 闭环特征方程有纯虚根、系统处于稳定边界。

1) 应用劳斯判据求出系统处于稳定边界的临界值 K' ，由 K' 值求出相应的 ω 值

2) 代数法

$$s = j\omega \quad \text{代入特征方程} \quad 1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \\ \operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \end{cases}$$

联立求解，
 \rightarrow 根轨迹与虚轴的交点 ω 值和相应的临界 K' 值。

系统的开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{K'}{s(s+1)(s+2)}$ 求根轨迹与虚轴的交点。

闭环特征方程 $s(s+1)(s+2) + K' = s^3 + 3s^2 + 2s + K' = 0$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k' \\ s^1 & \frac{6-k'}{3} & 0 \\ s^0 & k' & \end{array}$$

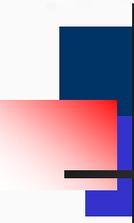
系统稳定的临界K' 值：
 $K' = 6$

阵列中 s^2 行元素构成辅助方程

$$3s^2 + 6 = 0$$

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

根轨迹与虚轴的交点



系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K'}{s(s+1)(s+2)}$$

求根轨迹与虚轴的交点。

$s = j\omega$ 代入系统闭环特征方程

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K' = (K' - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

$$2\omega - \omega^3 = 0$$

$$K' - 3\omega^2 = 0$$

$$K' = 6$$

$$\omega = \pm\sqrt{2}$$

九、闭环特征方程根之和与根之积

系统闭环特征多项式

z_i 开环零点

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

p_i 开环极点

s_i 闭环极点

闭环特征方程的根（即闭环极点）与特征方程的系数关系：

$$\prod_{i=1}^n s_i = (-1)^n a_n \qquad \sum_{i=1}^n s_i = -a_1$$

1) $(n-m) \geq 2$ 时，根之和与根轨迹增益 K' 无关，是个常数，

且有
$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i$$

2) 根之和不 $\rightarrow K'$ 增大，一些根轨迹分支向左移动，则一定会相应有一些根轨迹分支向右移动。

$$G(s)H(s) = \frac{3K(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

➤根轨迹增益 $K' = 3K$ 。

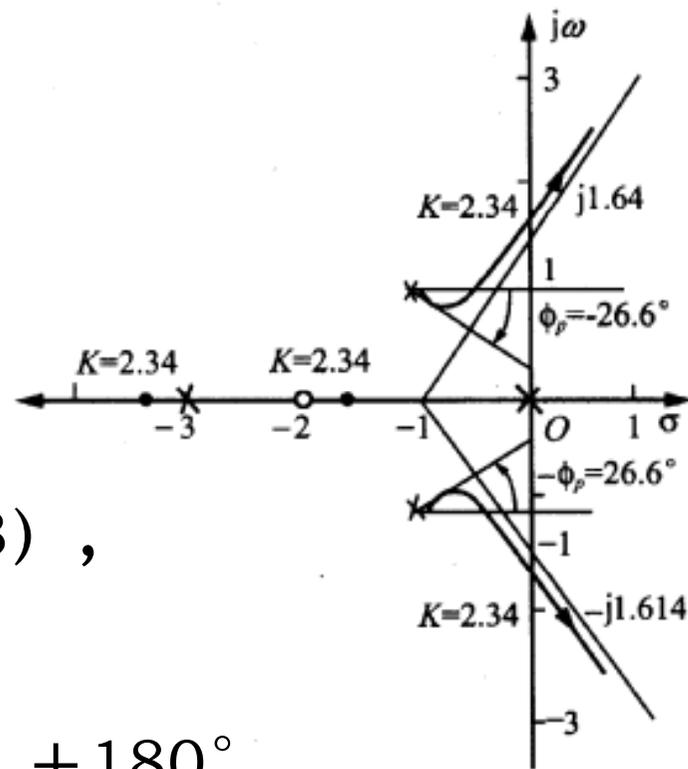
➤根轨迹对称于实轴，有四条根轨迹分支分别起始于开环极点 0 ， -3 ， $-1 \pm j$ ，终止于零点 -2 和另外三个无限远零点。

➤实轴上区段 $0 \sim -2$ 和 $-3 \sim -\infty$ 为根轨迹。

➤根轨迹有三条渐近线 ($n-m=3$)，

与实轴的倾角为 $\phi_a = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{3}$

取 $k=0, 1 \rightarrow +60^\circ, -60^\circ, +180^\circ$



➤ 渐近线与实轴交点坐标为

$$\sigma_a = \frac{(0-3-1+j-1-j)-(-2)}{4-1} = -1$$

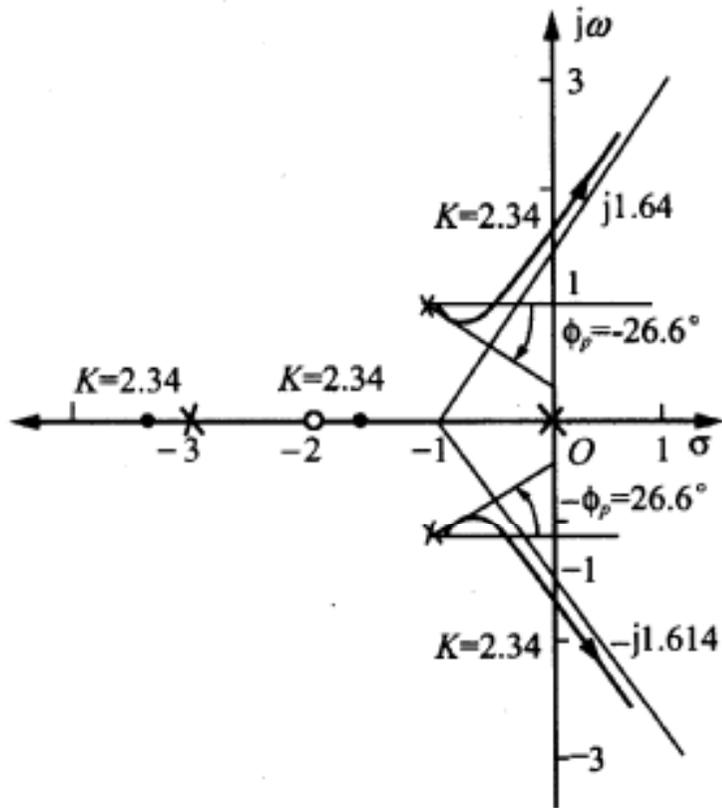
➤ 系统特征方程

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (6 + K')s + 2K' = 0$$

s^4	1	8	$2K'$
s^3	5	$6 + K'$	0
s^2	$8 - \frac{1}{5}(6 + K')$	$2K'$	
s^1	$6 + K' - \frac{50K'}{34 - K'}$	0	
s^0	$2K'$		

$$\begin{cases} \left[8 - \frac{1}{5}(6 + K') \right] s^2 + 2K' = 0 \\ K' = 3K = 7.02 \end{cases}$$

→ 根轨迹与虚轴的交点 $s = \pm j1.614$

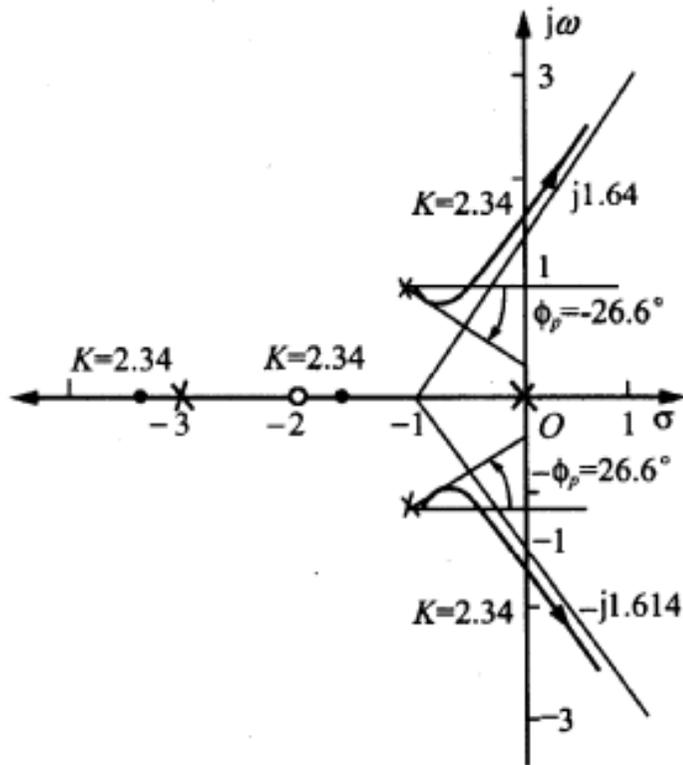


➤ 两条根轨迹分支起始于共轭复数极点 $-1 \pm j$

$$\phi_p = \pm(2k+1)180^\circ + 45^\circ - (135^\circ + 90^\circ + 26.6^\circ) = \mp 26.6^\circ$$

➤ 各闭环极点之和为 -5

→ 当实轴上根轨迹分支向左趋向于无限零点时，两个从复数极点出发的根轨迹分支趋向于右边无限零点。



$$K=2.34 \text{ 时 } s_{3,4} = \pm j1.614$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{根轨迹与虚轴两个交点} \\ \text{闭环极点之和为 } -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s_2 = -3.42 \\ s_1 = -1.58 \end{array}$$

$$\text{闭环极点之和为 } -5$$

$$\text{闭环交点之积为 } 2K' = -14.04$$

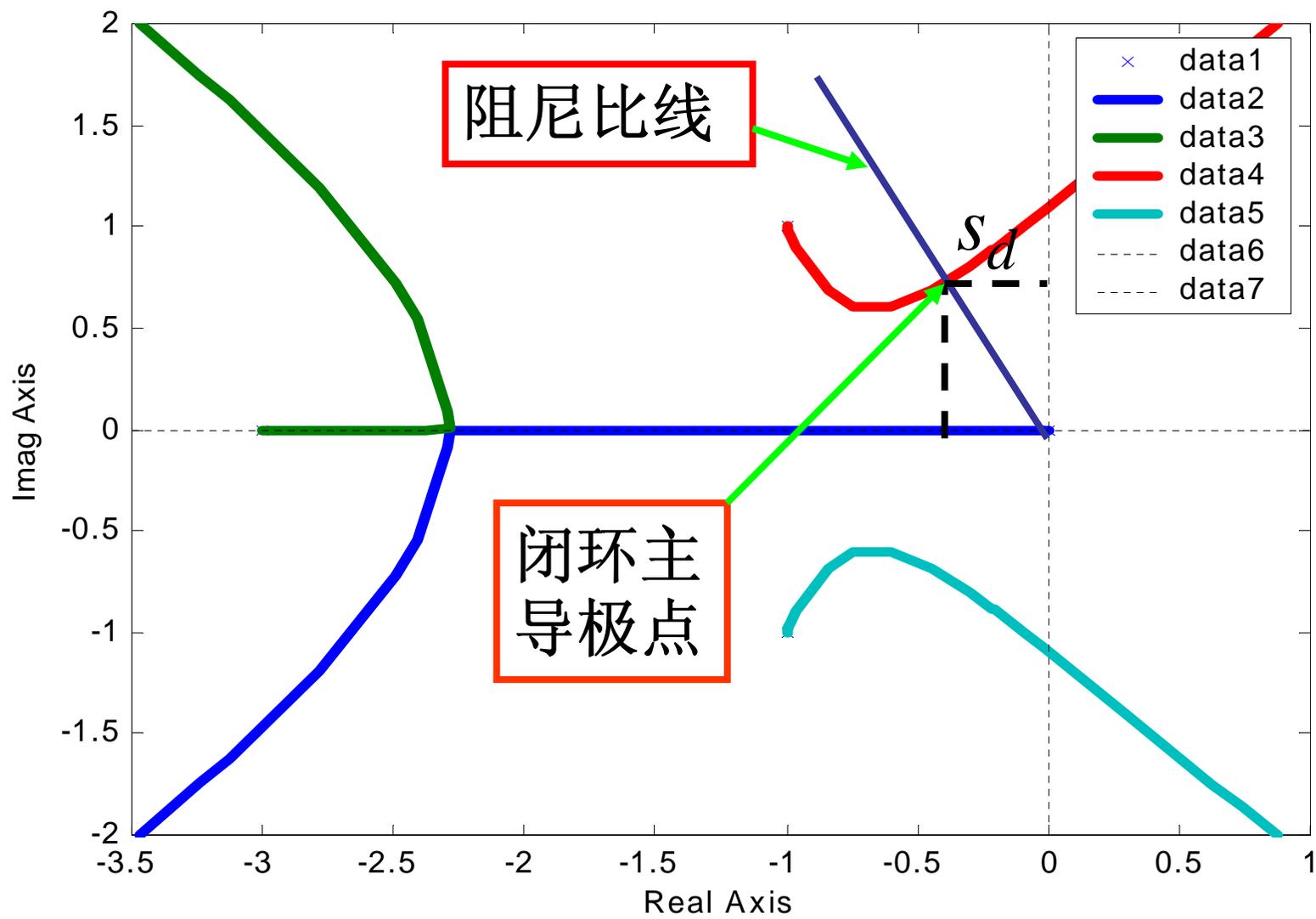
三、闭环极点的确定

例： 设反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

若要求闭环系统的阻尼比 $\xi = 0.5$, 求系统闭环极点。

- 解：**
- (1) 根据根轨迹画法基本规则画出根轨迹图；
 - (2) 在根轨迹图上画出阻尼比线；
 - (3) 求出根轨迹与阻尼比线的交点得到闭环主导极点的位置；
 - (4) 根据幅值条件，求出对应的开环增益；
 - (5) 利用闭环特征方程的根之和和根之积确定其它闭环极点。



闭环主导极点为 $s_d = 0.4 \pm j0.7$

根据幅值条件开环增益为

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|} = \prod_{i=1}^4 |s_d - p_i| = 2.91$$

特征方程

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K = 0$$

$$\sum_{i=1}^n s_i = -a_1 = -5$$

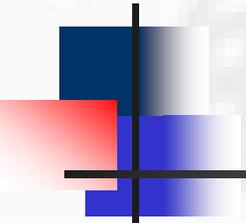
$$\prod_{i=1}^n s_i = (-1)^n a_n = (-1)^4 \times 2.91 = 2.59$$

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = -0.4 + j0.7 + (-0.4 - j0.7) + s_3 + s_4 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1 \times s_2 \times s_3 \times s_4 = (-0.4 + j0.7) \times (-0.4 - j0.7) \times s_3 \times s_4 = 2.91 \end{cases}$$


$$\begin{cases} s_3 = -1.4 \\ s_4 = -2.85 \end{cases}$$

§ 4—3 广义根轨迹



一、参数根轨迹

二、多回路根轨迹

三、正反馈和零度根轨迹

一、参数根轨迹

以系统中任意一个参数（开环零点、开环极点、时间常数、反馈比例系数等）绘制的根轨迹。

研究参数根轨迹的目的

分析参数变化对系统性能的影响

绘制参数根轨迹图基本原理

常规根轨迹方程：

$$1 + G(s)H(s) = 1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

参数根轨
迹方程:

$$1 + \alpha \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$$

等效开环
传递函数

以 α 为可变参数绘制的根轨迹即为参数根轨迹

例: 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_1(s + \alpha)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

绘制以 α 为参数的参数根轨迹, 并讨论 α 值对系统稳定性的影响。

解: (1) 以 α 为参量的等效开环传递函数

系统特征方程

$$1 + \frac{K_1(s + \alpha)}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

$$s(s^2 + 2s + 2) + K_1(s + \alpha) = 0$$

$$s(s^2 + 2s + 2) + K_1s + \alpha K_1 = 0$$

$$1 + \alpha \frac{K_1}{s(s^2 + 2s + 2) + K_1s} = 0$$

等效开环
传递函数

$$G'(s)H'(s) = \frac{K_1}{s(s^2 + 2s + 2) + K_1s} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2) + s} = \frac{K_1}{s(s + 1 - j\sqrt{2})(s + 1 + j\sqrt{2})} \quad K_1 = 1$$

开环极点 $p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j\sqrt{2}$ $p_3 = -1 - j\sqrt{2}$

实轴上的根轨迹 $[-\infty, 0]$

渐近线

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_a &= \pm \frac{(2q+1)180^\circ}{n-m} = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ (q=0,1) \\ \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0 + (-1 + j\sqrt{2}) + (-1 - j\sqrt{2}) - 0}{3-0} = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right.$$

根轨迹与虚轴的交点:

特征方程

$$s^3 + 2s^2 + 3s + \alpha = 0$$

$$6 - \alpha = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$2s^2 + \alpha = 2s^2 + 6 = 0$$

交点为

$$s = \pm\sqrt{3} = \pm j1.73$$

劳斯表

s^3	1	3
s^2	2	α
s^1	$\frac{6-\alpha}{2}$	0
s^0	α	

出射角:

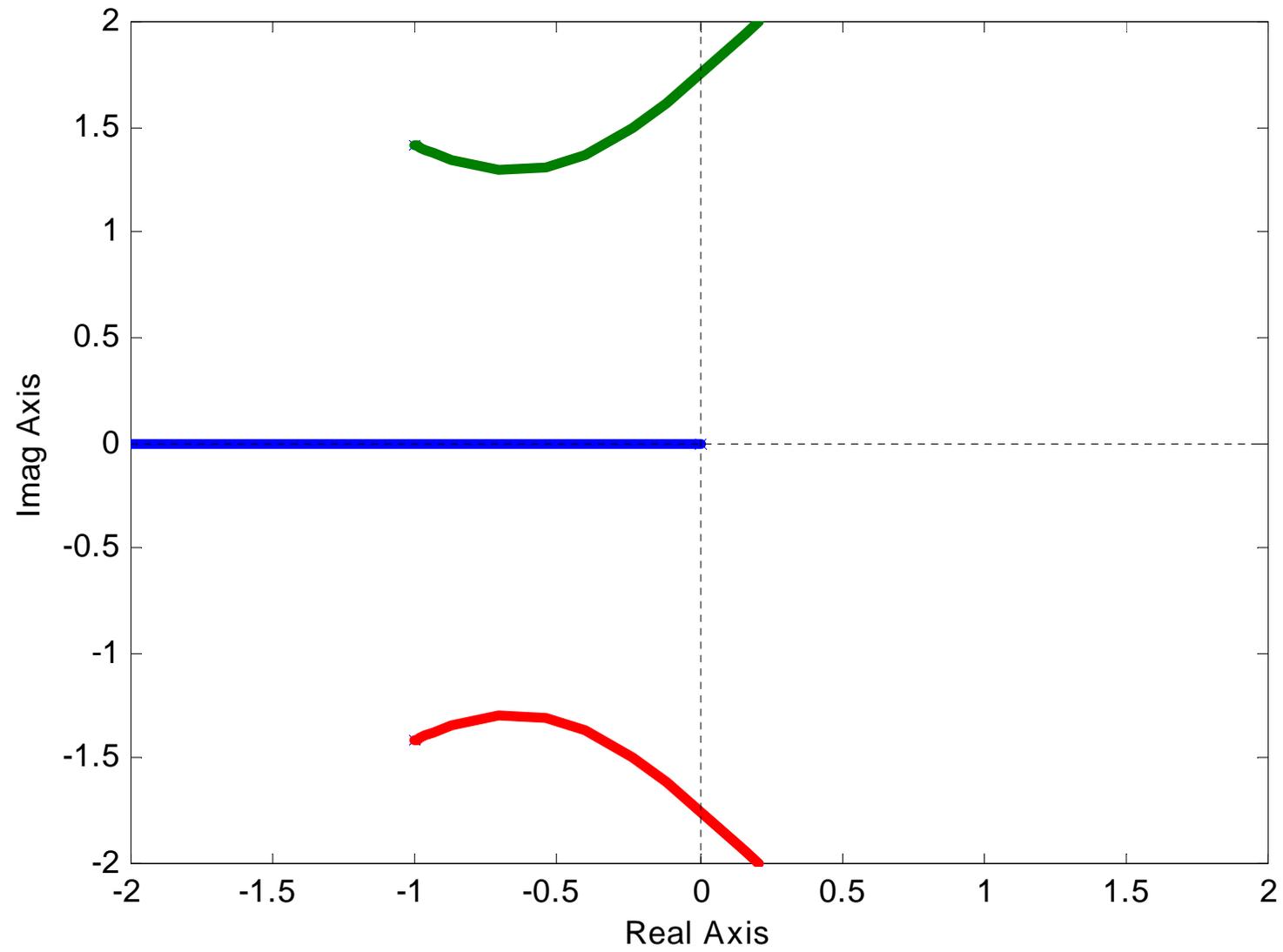
$$\angle\phi_p = \pm(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \angle(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \angle(p_j - p_i)$$

对于 $-1+j1.73$ 处的极点有

$$180^\circ - (180^\circ - \arctg 1.73) - 90^\circ = -30^\circ$$

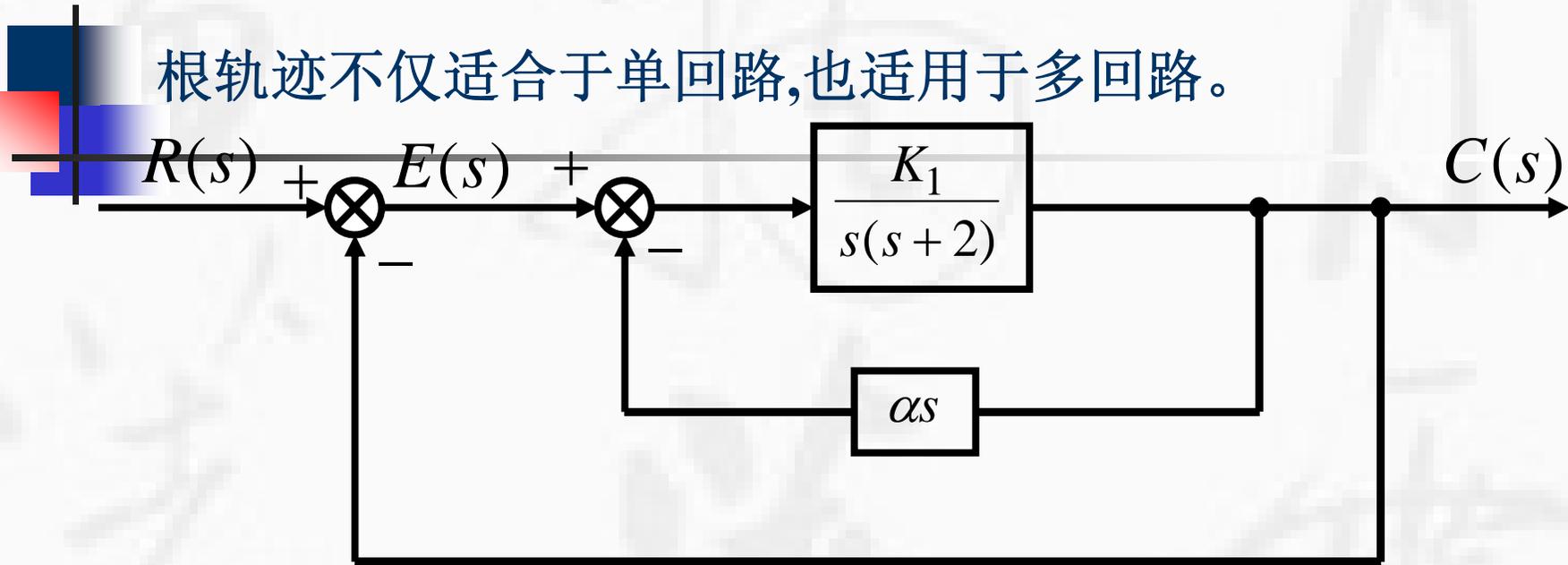
对于 $-1-j1.73$ 处的极点有

$$3 \times 180^\circ - (180^\circ + \arctg 1.73) - (270^\circ) = 30^\circ$$



二、多回路根轨迹

根轨迹不仅适合于单回路,也适用于多回路。



系统的开环传递函数

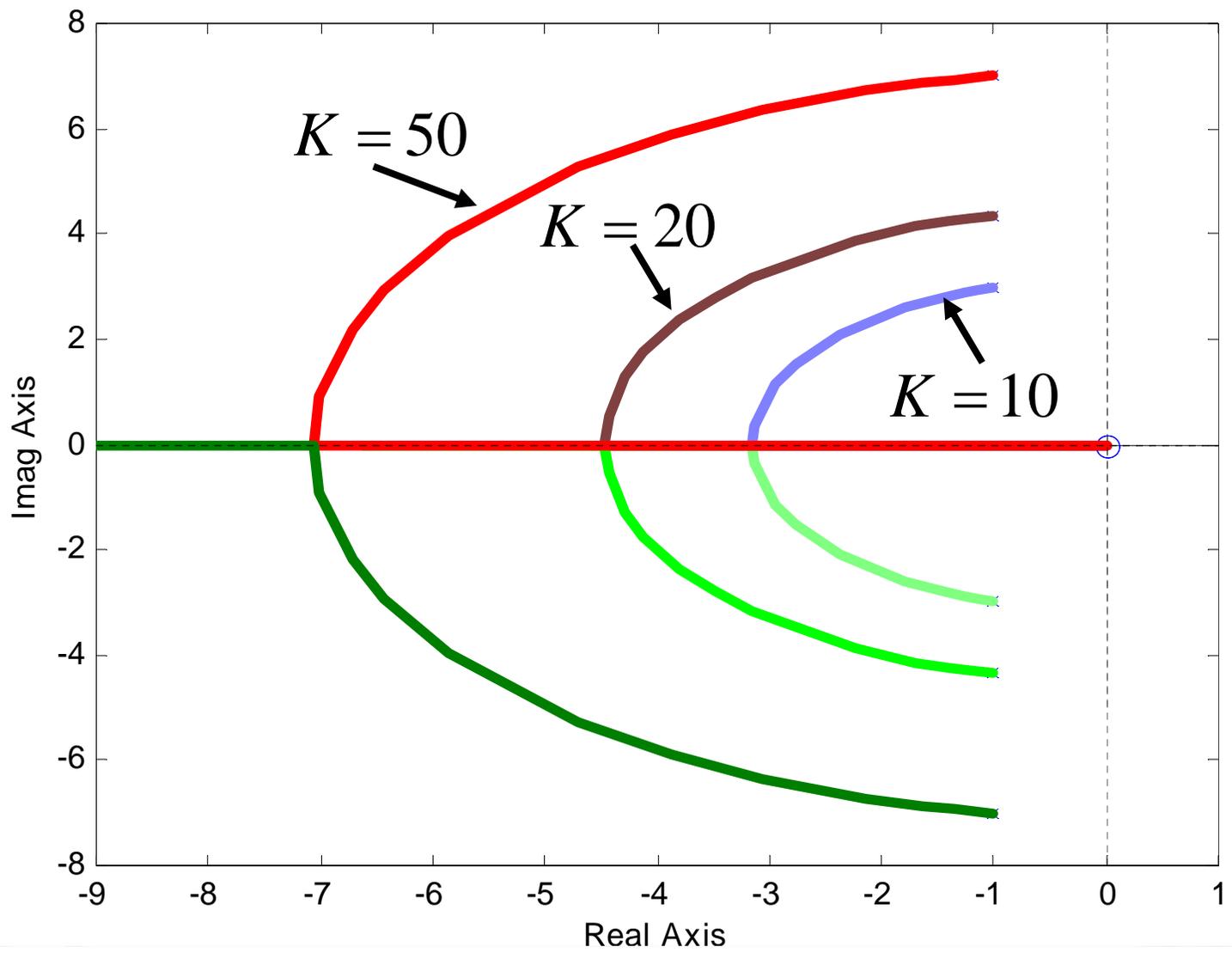
$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K_1}{s(s+2) + \alpha K_1 S}$$

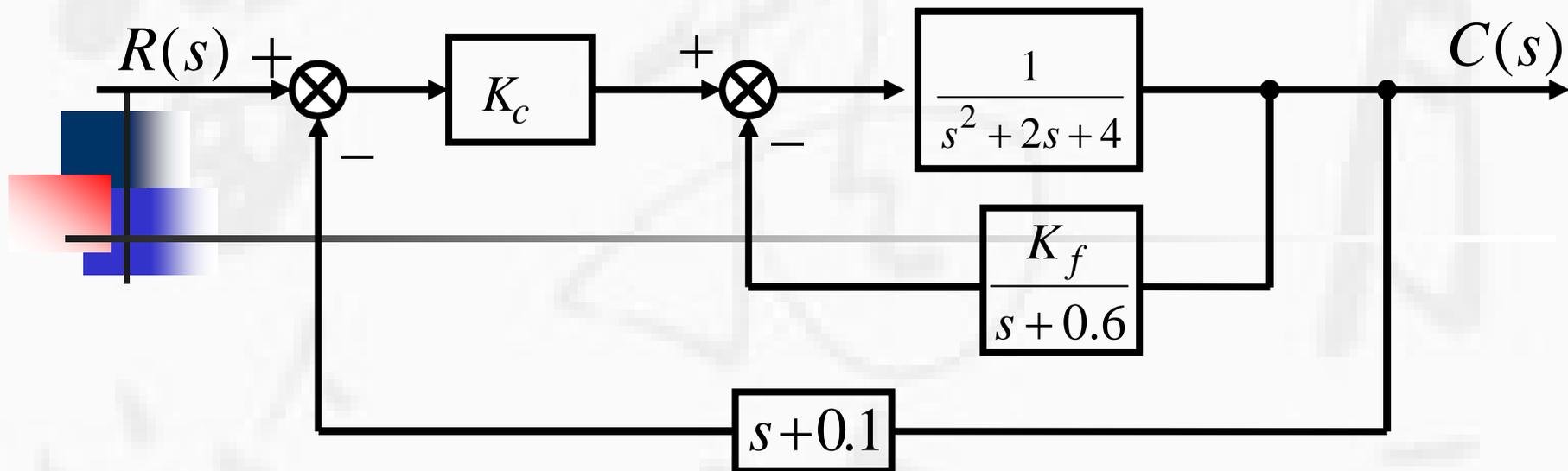
系统特征方程

$$s(s+2) + \alpha K_1 S + K_1 = 0$$

以 α 为参数

$$1 + \alpha \frac{K_1 S}{s(s+2) + K_1} = 0$$





研究以 K_c 、 K_f 为变量的根轨迹

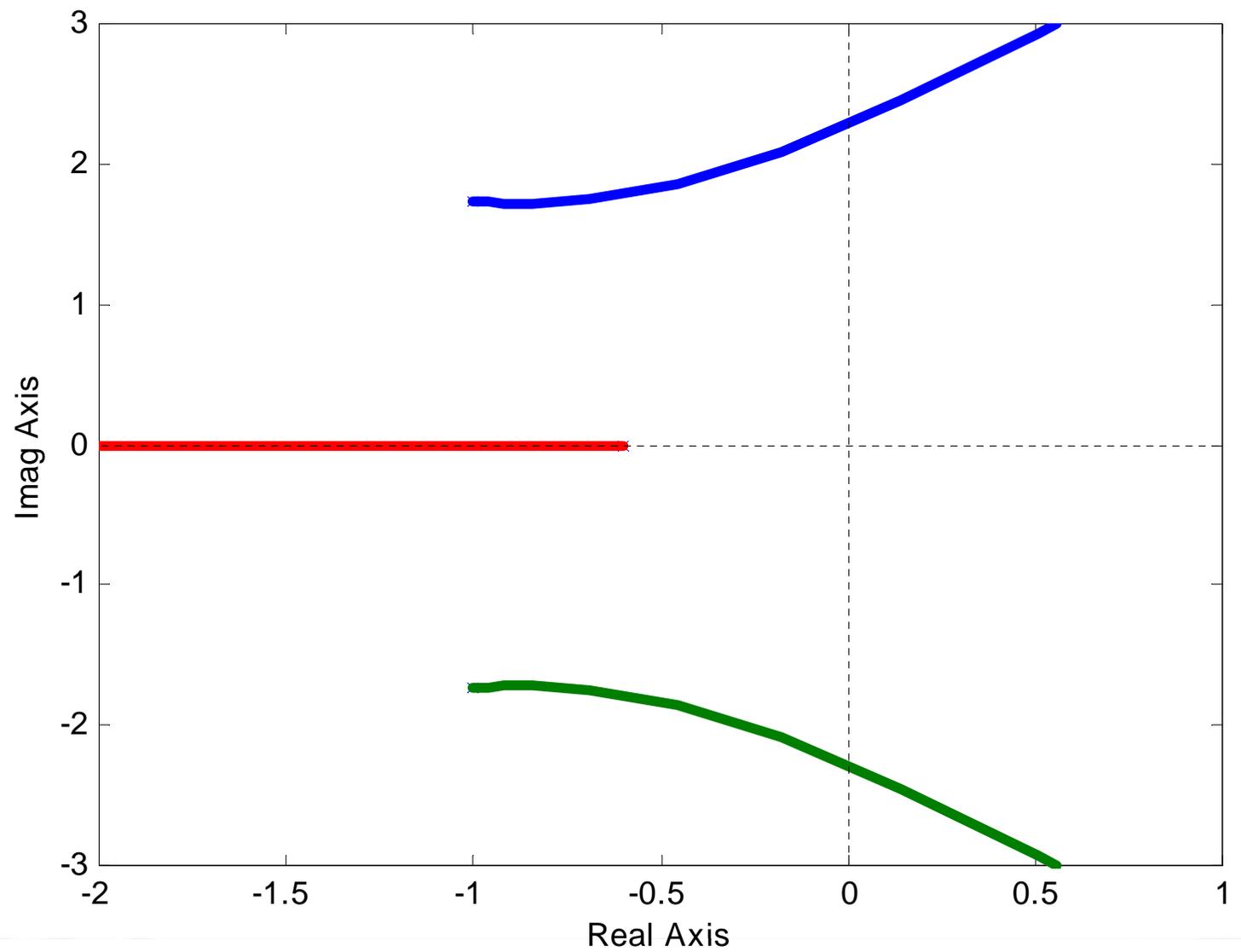
系统有两个环，内环的极点就是外环的开环零点！！

1) 绘制内环的根轨迹图

内环的开环传递函数

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K_f}{(s+0.6)(s^2+2s+4)}$$

根据根轨迹绘制规则绘制出以 K_f 为参数的内环根轨迹图



2)确定内环的闭环极点

假定内环的反馈系数 $3.2 < K_f < 3.5$

内环的特征方程 $(s+0.6)(s^2+2s+4)+K_f=0$

可选 $K_f=3.36$, 则求得内环的闭环极点为

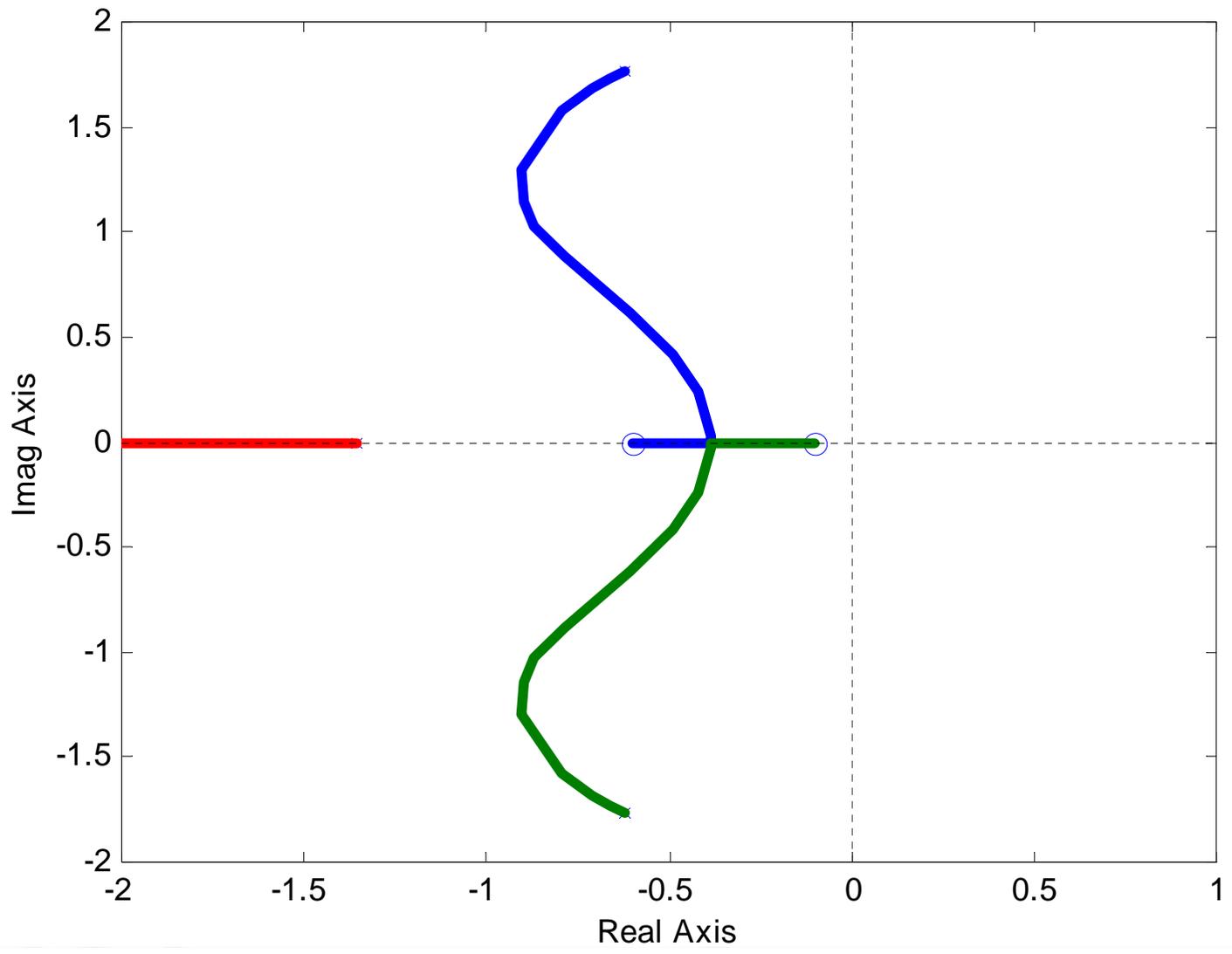
$$p_1 = -1.6 \quad p_2 = -0.5 + j1.83 \quad p_3 = -0.5 - j1.83$$

3)绘制外环的根轨迹图

外环的开环传递函数

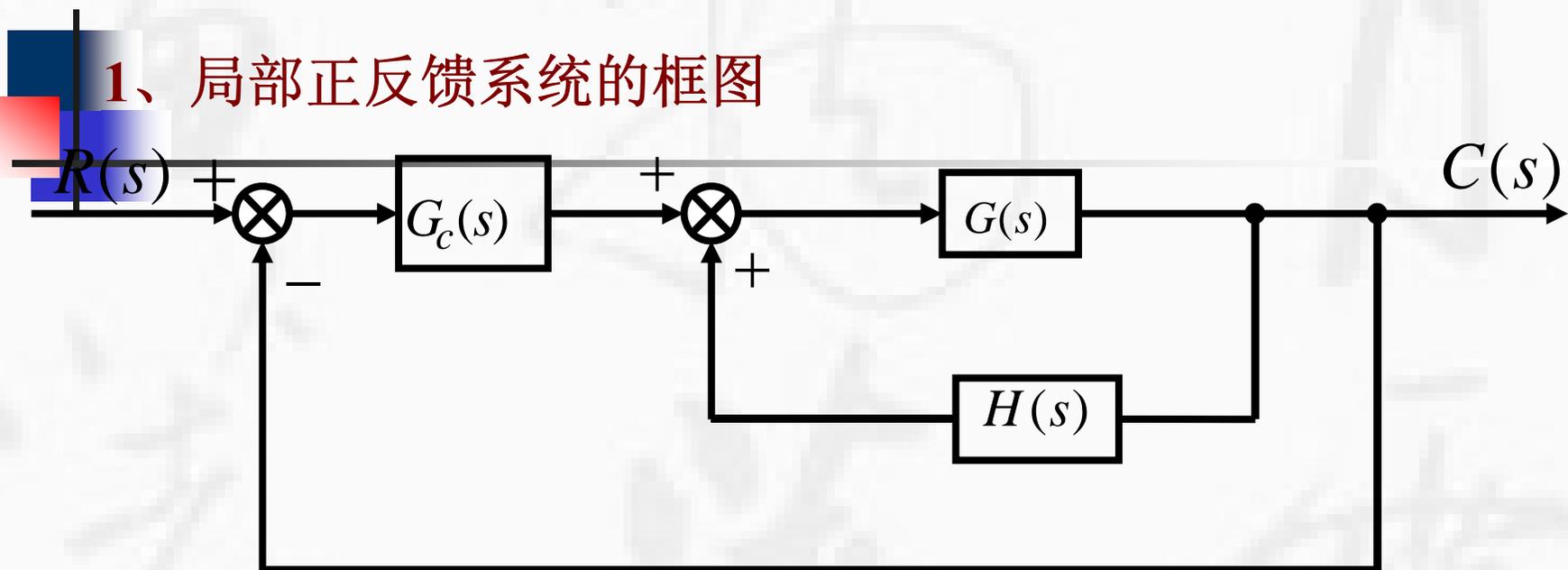
$$G(s)H(s) = K_c \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)H_1(s)} H_2(s)$$

$$G(s)H(s) = \frac{K_c (s+0.6)(s+0.1)}{(s+1.6)(s^2+s+3.6)}$$



三、正反馈和零度根轨迹

1、局部正反馈系统的框图



正反馈回路的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

特征方程 $1 - G(s)H(s) = 0$

幅值条件

$$K' \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1$$

幅角条件 ($k=0, 1, 2, \dots$)

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm 2k\pi$$

绘制正反馈系统根轨迹的基本规则

- (1)、根轨迹的分支数 (相同)
- (2)、根轨迹的起点和终点 (相同)
- (3)、根轨迹的对称性 (相同)
- (4)、实轴上的根轨迹：实轴上根轨迹区段的右侧(实轴上)开环实零、极点数目之和相应为偶数(0也视为偶数)。

(5)、根轨迹的渐近线：

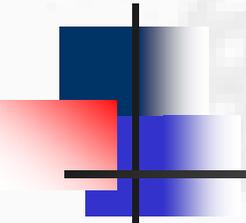
根轨迹渐近线与实轴的交点 (相同)

根轨迹渐近线与实轴正方向的夹角为

$$\phi_a = \pm \frac{2k}{n-m} 180^\circ \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(6)、根轨迹的会合点和分离点 (相同)

(7)、根轨迹的出射角和入射角


$$\angle \phi_{p_j} = \pm 2k\pi + \sum_{i=1}^m \angle(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \angle(p_j - p_i)$$

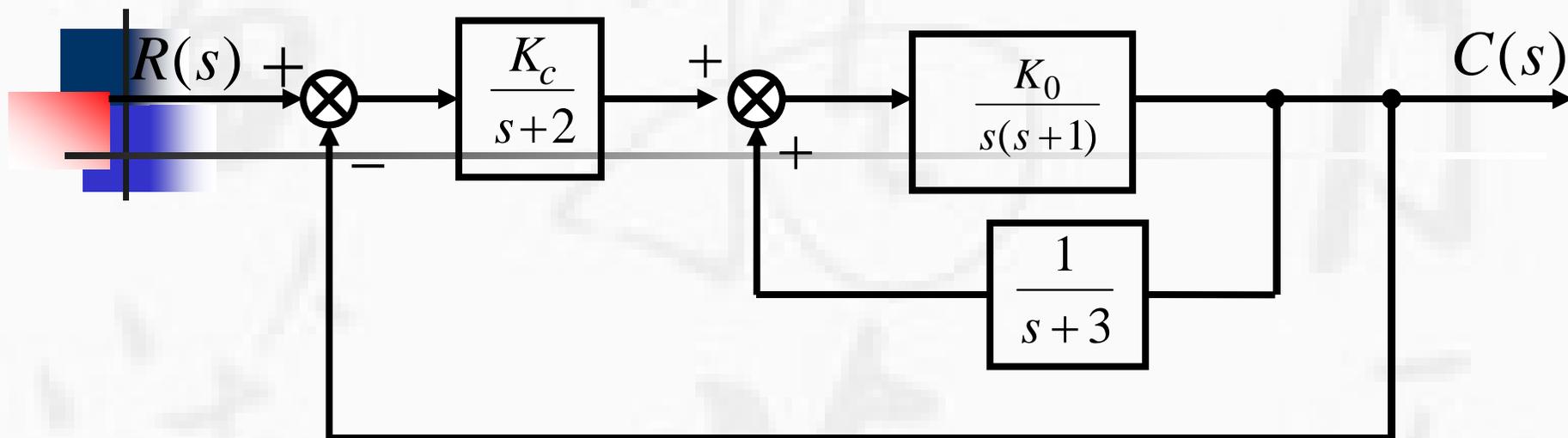
$$\angle \phi_{z_j} = \pm 2k\pi + \sum_{i=1}^n \angle(z_j - p_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \angle(z_j - z_i)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

(8)、根轨迹与虚轴的交点 (相同)

(9)、闭环极点的和与积 (相同)

例 控制系统方框图如下所示



系统的内环为正反馈，绘制内环根轨迹图。

解：(1) 内环的开环传递函数 $G_1(s)H_1(s) = \frac{K_0}{s(s+1)(s+3)}$

(2) 根轨迹的分支数 3

(3) 根轨迹的起点 0, -1, -3 终点均为 ∞

(4) 实轴上的根轨迹 $[0, \infty]$ $[-3, -1]$

(5) 根轨迹的渐近线

$$\phi_a = \pm \frac{2k}{n-m} 180^\circ = 0^\circ, \pm 120^\circ \quad k = 0, 1$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0 + (-1) + (-3)}{3-0} = -\frac{4}{3}$$

(6) 根轨迹的分离点

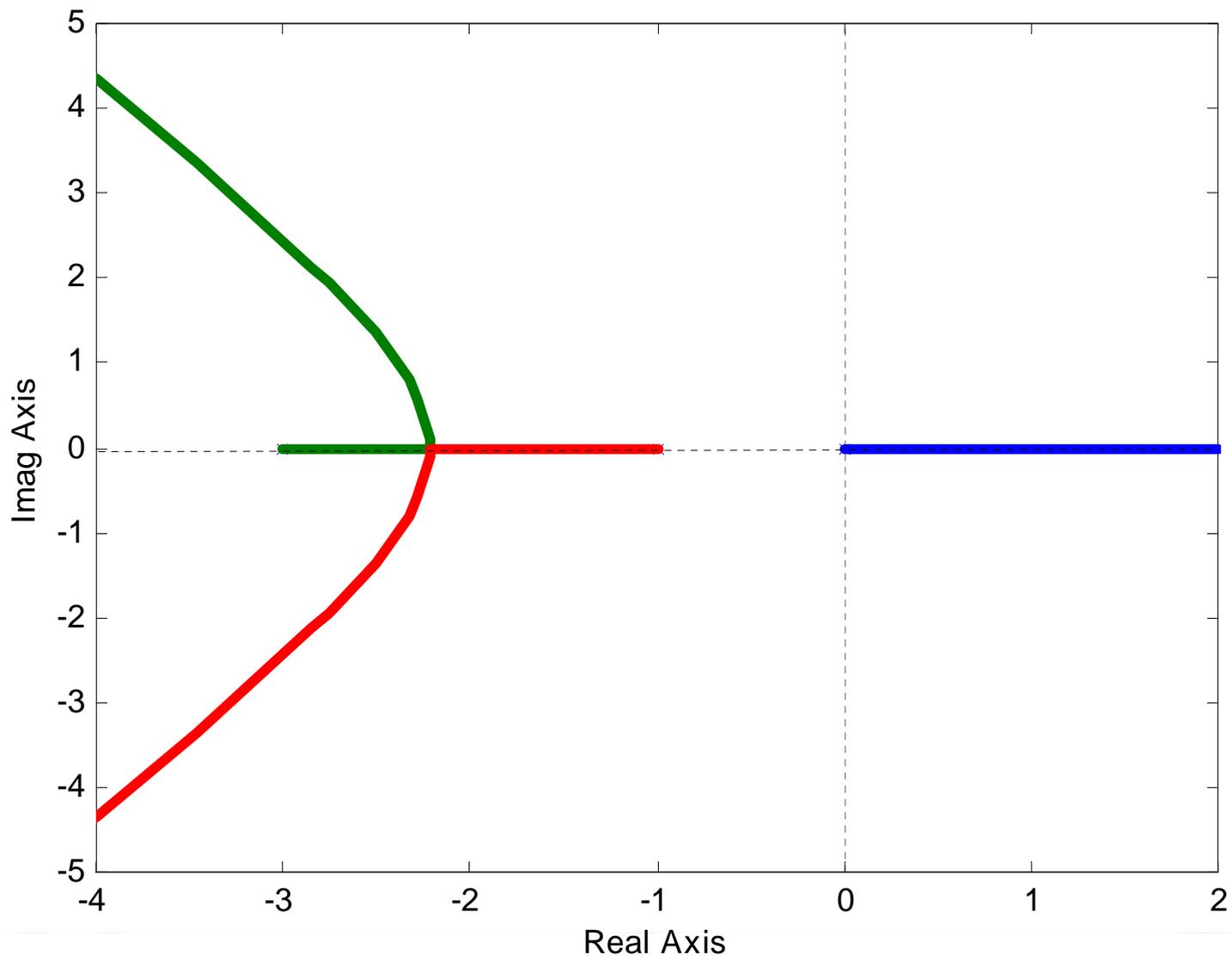
特征方程

$$s^3 + 4s^2 + 3s - K_0 = 0$$

$$\frac{d K_0}{d s} = 3s^2 + 8s + 3 = 0$$

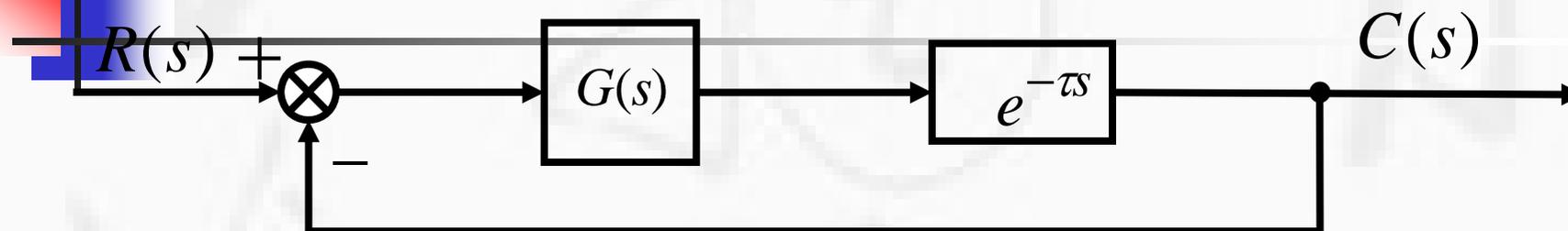


$$s_1 = -2.22 \quad s_2 = -0.45(\text{舍去})$$



§ 4—4 滞后系统的根轨迹

在自动控制系统中有时会出现纯时间滞后现象



滞后环节的存在使系统的根轨迹具有一定的特殊性，对系统的稳定性会带来不利的影响。

系统闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{e^{-\tau s} G(s)}{1 + e^{-\tau s} G(s)}$$

特征方程

$$1 + e^{-\tau s} G(s) = 0$$

这是一个超越方程，闭环系统的特征根不再是有限个，而是无限多个，这是滞后系统的重要特征。