

• 研究论文 •

## 空域求解小波图像修补问题的非局部方法

周光华 冯象初

(西安电子科技大学理学院, 西安 陕西 710071)

**摘要** 本文介绍了图像修补和小波图像修补问题, 在分别研究了小波域和空域的图像修补技术的基础上, 提出在空域解决小波域的图像修补问题的思想。本文简要给出了该思想的实现依据, 引入非局部方法, 提出实现该思想的非局部方法。实验表明, 本文方法可以得到较好的图像修补效果, 显著提高图像的峰值信噪比, 说明小波域修补问题在空域中解决的可行性。

**关键词** 图像处理; 图像修补; 非局部; 小波

**中图分类号** TP319 **文献标识码** A

## Non-local Method Solving Wavelet Image Inpainting Problem in Pixel Domain

Guanghua Zhou Xiangchu Feng

(College of Mathematics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract** The problem of Image inpainting and wavelet image inpainting are presented in this paper. Based on the study of various methods to inpaint image in wavelet and pixel domain respectively, we get an idea to solve wavelet image inpainting problem in pixel domain. Non-local method is introduced. A method using non-local method in pixel domain is proposed to put the thought above into practice. The experiments demonstrates the method works, and inpainting effect is good. It also illustrates the feasibility of solving wavelet image inpainting in pixel domain.

**Keywords** Image processing; Image inpainting; Non-local; Wavelet

### 1 引言

图像修补是图像处理重要的一个分支, 该技术几乎与艺术的发展一样悠久。在图像采集、处理、保存以及传输等等过程中, 有许多因素都会对图像产生损伤, 丢失图像中的一些信息。随着各种领域对图像的要求的提高, 这就需要研究如何

---

**收稿日期:** 年-月-日; **收到修改稿日期:** 年-月-日

**基金项目:** 国家自然科学基金(NSFC 60872138)资助项目。

**作者简介:** 周光华(1985---), 男, 硕士, 主要从事图像处理方面的研究。Email: picassolone@yahoo.com.cn

**导师简介:** 冯象初(1962---), 男, 博士, 教授, 主要从事小波分析、尺度空间、微分方程数值解和图像处理方面的研究。 Email: xcfeng@mail.xidian.edu.cn

**\*通信联系人:** 周光华 E-mail: picassolone@yahoo.com.cn

在损伤图像现有信息的基础上, 获取包含更多信息的图像, 于是就出现了图像修补技术。图像修补就是未缺损图像  $I$  遭破坏后, 由缺损后图像  $v = I \setminus U$  的待修补区域  $U$  周围的信息  $D \in v$ , 将图像填补到待修补缺损区域  $U$  中, 达到良好的视觉效果或其他要求(图 1)。

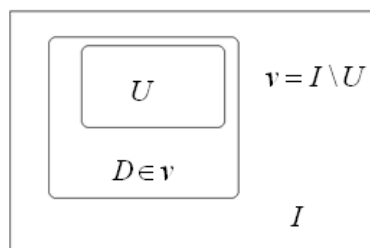


图1 图像修补示意图。

Fig. 1 The sketch map of image inpainting.

Bertalmio等把图像修补技术引入到图像处理中<sup>[1]</sup>, 提出BSCB模型。这种方法采用了物理学中热扩散的思想, 是一种基于偏微分方程(PDE)的修补方法。T Chan等提出的CDD(Curvature-Driven Diffusion)模型也是这类方法<sup>[2]</sup>。此类基于变分PDE的方法还有TV(Total Variation)模型<sup>[3]</sup>、Euler's elastica模型<sup>[4]</sup>和Mumford-Shah模型<sup>[5]</sup>和Mumford-Shah-Euler模型<sup>[6]</sup>等。对于补全图像大块缺损, 引入纹理合成技术, 先把图像分解为结构部分和纹理部分, 结构部分用图像修补方法, 纹理部分修补用纹理合成方法修补。

小波分析是近几十年发展起来的新的数学分支, 对数学和应用学科都产生了深远的影响。由于小波变换具有很好的时频局部化特性, 是一种新的时频域分析工具, 在图像处理领域诸如图像压缩<sup>[7]</sup>、图像去噪<sup>[8, 9]</sup>、图像增强<sup>[10]</sup>等方面得到广泛应用。

用小波工具对图像进行处理时候, 会因为各种因素丢失部分小波系数, 造成重构得到缺损图像。T Chan等在<sup>[11]</sup>中提出了小波域图像修补问题。在[12]中Zhou等应用非局部全变分方法进行小波域图像修补。同时, 文章中指出可以借鉴现有空域图像修补技术。

小波域图像修补的目的和空域图像修补应当是一致的, 就是对缺损图像修补以达到各种要求。据此本文提出, 由丢失小波系数造成的图像修补问题不必局限于在小波域进行, 而且, 空域图像修补技术相对更加成熟, 有更多方法可以利用, 所以有必要研究在空域解决小波域图像修补问题。本文第二部分引入了非局部方

法，简要给出了空域中解决小波图像修补问题的依据，并提出了实现以上思想的非局部方法；第三部分是本文修补实验的结果和分析；最后总结并指出可以做一些更进一步研究。

## 2 非局部方法及空域求解小波图像修补的实现依据和非局部方法

### 2.1 空域求解小波图像修补的实现依据

一般地，小波图像修补是要使得小波域图像能量泛函取得极小值，求得极小化泛函的解，得到残缺处的小波系数，从而完成修补的过程。以基于 TV 的小波图像修补技术<sup>[11]</sup>为例，其基本原理如下：

设标准的图像模型为  $z(x) = u_0(x) + n(x)$ ，其中  $u_0(x)$  是原始无噪声图像， $n(x)$  为高斯白噪声。设图像尺寸大小为  $n \times m$ ， $z(x)$  的标准小波变换表示如下：

$z(\alpha, x) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ ， $j \in Z, k \in Z^2$ 。小波域的数据缺损，亦即部分系数  $\{\alpha_{j,k}\}$  丢失，导致图像部分信息丢失，小波图像修补的目的就是恢复这些丢失的小波系数。

对没有噪声或者噪声大小可忽略的图像，只要填充缺失小波系数并保持其他系数即可。利用 TV 极小化方法来填充小波系数的模型为：

$$\min_{\beta_{j,k} (j,k) \in I} F(u, z) = \sum_{R^2} |\nabla_x u(\beta, x)| dx = TV(u(\beta, x)) \quad (1)$$

其中  $u(\beta, x)$  有小波变换： $u(\beta, x) = \sum_{j,k} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ ， $\beta = (\beta_{j,k})$ ， $j \in Z, k \in Z^2$ ，并使得  $\beta_{j,k} = \alpha_{j,k}$ ， $(j,k) \notin I$ ，其中  $I = \{(j,k) | \alpha_{j,k} \text{ 为缺失的小波系数}\}$ 。模型所对应 Euler-Lagrange 方程为：

$$-\int_{R^2} \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \psi_{j,k} dx = 0 \quad (2)$$

因为在数据处理或传输等过程中，数据中产生噪声是不可避免的， $\{\beta_{j,k}, (j,k) \in I\}$  可能完全丢失，其余的系数  $\{\beta_{j,k}, (j,k) \notin I\}$  可能也会被噪声破坏，这种情况下的非局部小波修补模型为：

$$\min_{\beta_{j,k}} F(u, z) = \int_{R^2} |\nabla_x u(\beta, x)| dx + \sum_{(j,k)} \lambda_{j,k} (\beta_{j,k} - \alpha_{j,k}) \quad (3)$$

其中当  $(j,k) \in I$  时，参数  $\lambda_{(j,k)} = 0$ 。模型对应 Euler-Lagrange 方程如下：

$$-\int_{R^2} \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \psi_{j,k} dx + 2\lambda_{j,k} (\beta_{j,k} - \alpha_{j,k}) = 0 \quad (4)$$

文献[11]中详细地讨论了以上模型的解的存在性及唯一性。只要解模型所对应的 Euler-Lagrange 方程即可得到模型的解。以下是基于有限差分方法的小波图像修补模型的数值解法：

Step1. 初始化  $n=0$ ， $\beta_{j,k}^{new} = \alpha_{j,k} \chi_{j,k}$ ， $\beta_{j,k}^{old} = 0$ ，设置误差为  $E = \|\beta^{new} - \beta^{old}\|_2$

Step2. 当  $i \leq N$  或者  $E \leq \delta$  时，

$\beta_{j,k}^{old} = \beta_{j,k}^{new}$ ， $u = IWT(\beta)$ ，对所有  $(i, j)$  计算

$$curv_{i,j} = D_1^- \left( \frac{D_1^+ u_{i,j}}{\sqrt{|D_1^+ u_{i,j}|^2 + |D_2^+ u_{i,j}|^2 + \varepsilon}} \right) + D_2^- \left( \frac{D_2^+ u_{i,j}}{\sqrt{|D_1^+ u_{i,j}|^2 + |D_2^+ u_{i,j}|^2 + \varepsilon}} \right)$$

$$WCURV = FWT(curv)，对所有 (j, k)，\beta_{j,k}^{new} = \beta_{j,k}^{old} + \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \gamma_{j,k}，$$

其中， $\gamma_{j,k} = \beta_{j,k}^{TV} - 2\lambda(\beta_{j,k} - \alpha_{j,k})\chi_{j,k}$ ，当  $(j, k) \in I$  时，参数  $\lambda = 0$

$$E = \|\beta^{new} - \beta^{old}\|_2，i = i+1$$

其中，IWT 为逆小波变换，FWT 是向前小波变换， $D_1^+ u_{k,l} = u_{k+1,l} - u_{k,l}$ ，

$D_2^+ u_{k,l} = u_{k,l+1} - u_{k,l}$ ， $D_1^- u_{k,l} = u_{k,l} - u_{k-1,l}$ ， $D_2^- u_{k,l} = u_{k,l} - u_{k,l-1}$ ，正数  $\varepsilon$  是用于当

$\sqrt{|D_1^+ u_{i,j}|^2 + |D_2^+ u_{i,j}|^2} = 0$  时数值算法也能够顺利进行， $\Delta_t$  为时间步长， $\Delta_x$  为空间网格， $\Delta_x = \frac{1}{n}$ 。

以上的修补过程自始至终都是用小波域的小波系数的形式来表示的，事实上，整个修补过程完全可以用空域图像的形式来表示和完成：用剩余小波系数重构得到空域待修补缺损图像；为达到使得上述小波图像修补过程中的能量泛函取得极小，我们修补或增强空域缺损图像得到新的图像，该图像具有较好的视觉效果和其能量泛函可以取到极小或者近似极小；小波域中的小波图像修补完成后，所得小波系数重构得到的图像也就是增强修复空域中缺损图像得到的图像，对这幅图像做小波分解，得到的系数也就是小波域中小波修补的结果（如图 1 所示）。

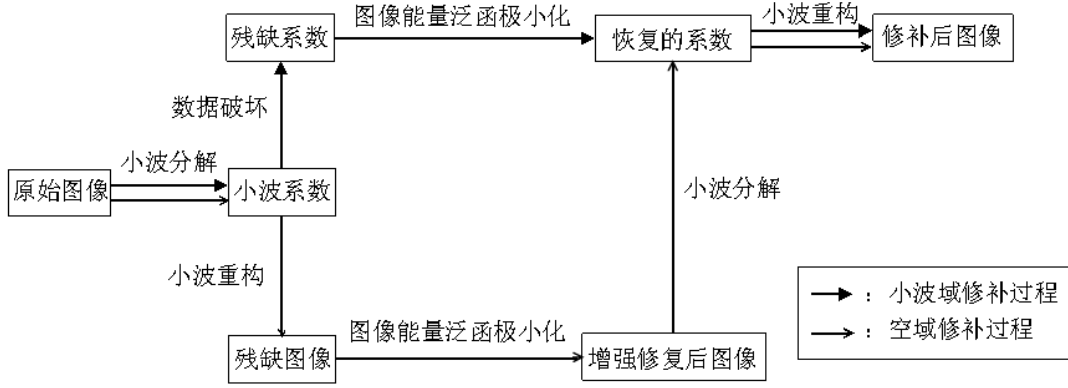


图 2 小波域与空域图像修补过程

Fig. 2 The image inpainting process in wavelet and pixel domain

## 2.2 非局部均值算法

Antoni Buades 等在文献 [13, 14] 中提出非局部均值 (Non-local means, NI-means) 算法。NI-means 算法不是依靠局部信息，而是利用整幅图像的空间相关性来处理图像。NI-means 算法对每个像素取那些邻域几何特性与该像素有一定类似度的像素的权平均，然后用此平均值调整原像素值，因此，相比于之前的局部处理工具，NI-means 有更加强的鲁棒性。当图像中的噪声是独立同分布时，图像像素是高度相关的，用 NI-means 算法可以很好的去噪，得到非常接近原始的图像。文献[13]中对 NI-means 的一致性作了详细的讨论，本文以下不再作介绍。NI-means 算法在其他图像处理领域也有所应用，并逐渐显示其优越性，在速度方面也有所进展。

设图像  $f = \{f(i) | i \in \Omega\}$ ，经处理后的图像为  $\hat{f}$ ，在像素  $i$  处的像素值  $\hat{f}(i)$  由在像素  $i$  的邻域  $\Omega_s$  中所有像素的加权平均得到：

$$\hat{f}(i) = \frac{1}{C(i)} \sum_{j \in \Omega_s} w(i, j) f(j), \quad (5)$$

其中正则化常数  $C(i) = \sum_{j \in \Omega_s} w(i, j)$ ，权重  $w(i, j)$  由像素  $i$  和像素  $j$  之间的高斯邻近相似度决定：

$$w(i, j) = \exp\left(-\frac{\|N_i - N_j\|_{2,a}^2}{h^2}\right), \quad (6)$$

其中  $N_i$  是一个以像素  $i$  为中心的正方形邻域， $\|\cdot\|_{2,a}$  是一个加权欧氏距离， $a$  是高

斯核的标准方差， $h$ 是退化参数。

### 2.3 空域求解小波图像修补问题的非局部方法

在本文中，通过计算图像的标准峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)来评估图像修补的效果：

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{\|u - u_0\|_2} \right) (dB) \quad (7)$$

其中  $u_0$  是原始图像， $u$  是修补处理后的图像， $\|\cdot\|_2$  是标准  $L^2$  范数。PSNR 越大时，图像修补的效果越好。

用 Daubechies 7 双正交小波分解图 3，其中边界处用对称延拓，然后随机去掉 50%小波系数，用剩余系数重构得到图 4。只要把图 4 作为小波图像修补问题的空域中待修补图像，在空域修补或增强图 4 得到接近原图的图像，小波域的系数也会得以修补。由于图 4 的许多特征都类似带噪声图像，因而考虑选用 Nl-means 对其进行处理。处理结果如图 5，可以发现 Nl-means 很好地增强修复了图 4，图 4 的 PSNR 为 12.80dB，修复后达到 52.55dB。

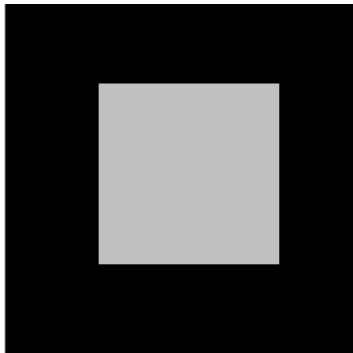


图 3  
Fig. 3

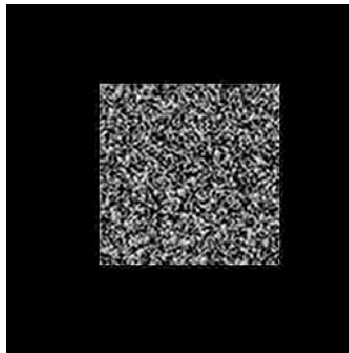


图 4  
Fig. 4

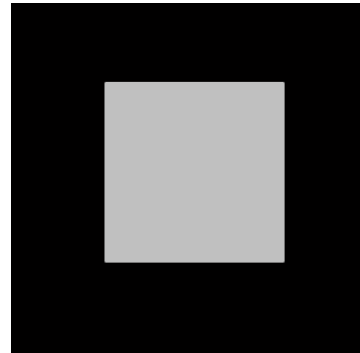


图 5  
Fig. 5

为模拟图像在小波域成块缺损小波系数，利用 Daubechies 7 双正交小波分解图 3 (图像大小:  $256 \times 256$ )，分别成块去掉小波系数位于 (100: 150, 100: 150)、(1: 100, 1: 256) 处的数据。用剩余数据重构分别得图 6、图 8，这是小波系数缺损后图像在空域的表现，其 PSNR 分别为 16.64dB、13.79dB。经 Nl-means 增强修复后结果分别如图 7、图 9，PSNR 均达到 52.55dB。

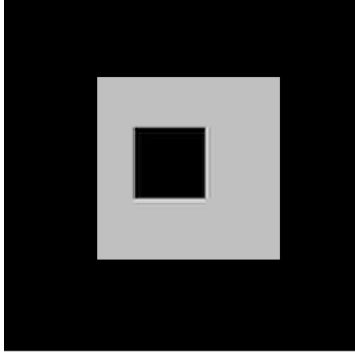


图 6  
Fig. 6

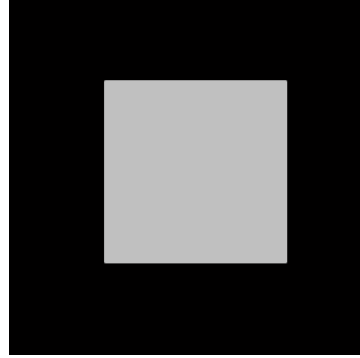


图 7  
Fig. 7

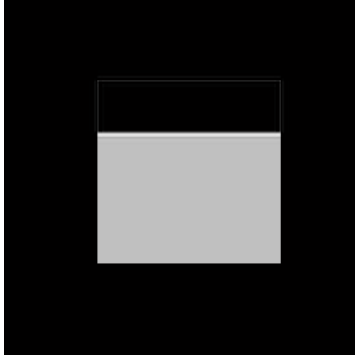


图 8  
Fig. 8

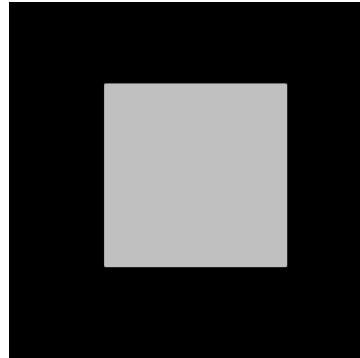


图 9  
Fig. 9

在以上模拟实验中， $\Omega_s$ 取以像素 $i$ 为中心的 $11 \times 11$ 邻域， $N_i$ 取以像素 $i$ 为中心的 $3 \times 3$ 邻域， $h$ 取为 10。以下本文在空域中解决小波图像修补问题中，图像增强修复时选用 NI-means 方法，并同设置参数同以上实验。

在空域实现小波图像修补的非局部方法的算法流程设计如图 10，其中， $v = \{v(i) | i \in \Omega\}$ 为空域的缺损图像， $\hat{v}$ 为修补后得到图像。设 $\hat{v}(i)$ 为像素 $i$ 的像素值，且 $\Omega_s$ 为像素 $i$ 的一个邻域，定义一个高斯核标准方差为 $a$ 的加权欧式距离 $\|\cdot\|_{2,a}$ ，设 $N_i$ 是一个以像素 $i$ 为中心的正方形邻域。度量像素 $i$ 和 $j$ 之间相似度的函数则定义为：

$$u(i, j) = \exp\left(-\frac{\|N_i - N_j\|_{2,a}^2}{k^2}\right), \quad (8)$$

其中参数 $k$ 控制了指数函数的衰退，进而成为相似度函数 $u(i, j)$ 的衰退指标。

根据 NI-means 方法，以上算法中利用 NI-means 方法由图像 $v$ 到 $\hat{v}$ 如下式：

$$\hat{i}(i) = \frac{1}{Z(i)} \sum_{j \in \Omega_s} u(i, j) v(j), \quad (9)$$

其中  $Z(i) = \sum_{j \in \Omega_s} u(i, j)$  是归一化常数。

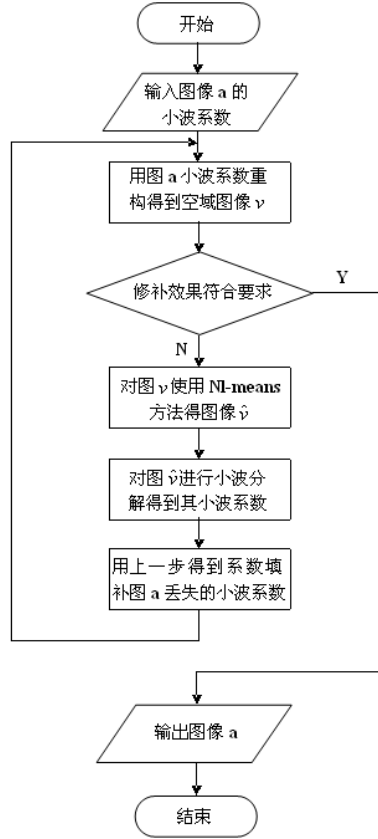


图 10 本文图像修补算法流程图。

Fig. 10 The flowchart of image inpainting algorithm in the paper.

在下一部分中，本文的实验将给出以上提出的算法的修补效果。实验结果表明，小波图像修补不必局限于在小波域进行，在空域中处理在小波域中遭到破坏的图像，仍旧可以达到修补效果要求。

### 3 实验与分析

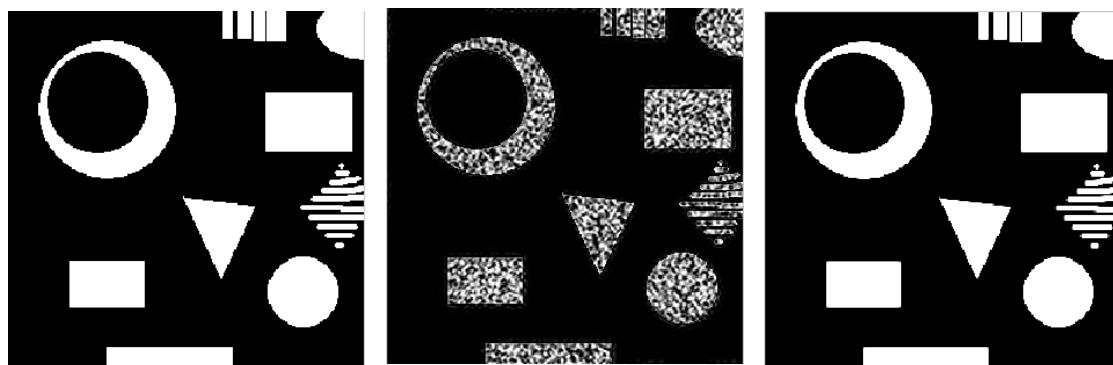
实验首先对原图像用 Daubechies 7-9 双正交小波进行小波分解，边界处用对称延拓，然后随机去掉 50%小波系数，重构得到实验中的空域缺损图像。

第一组实验的原图像(图 11.a)中包含简单图形元素，对应缺损图像如图 11.b, 其 PSNR 为 11.05dB, 图 11.c 是本文算法的修补结果, PSNR 达到 36.36dB. 第二组实验是对 Lena 图像(图 12.a)的缺损图像(图 12.b)进行修补实验, 实验结果如图 12.c, 图像的 PSNR 由 11.75dB 达到 34.69dB. 最后是对 Barbara 图像(图



13.a)用类似上一组实验的步骤进行图像修补实验，修补效果如图 13.c，其 PSNR 从 11.15dB 达到 35.98dB。

文献[11]中的修补实验中所用缺损图像也是使用 Daubechies 7-9 双正交小波处理，边界处用对称延拓，随机丢失 50%小波系数得到。本文处理结果与文献[11] 修补效果对比说明，该算法可以较好地保持修补图像的连通性原则，PSNR 显著提高，且修补视觉效果更好，因而，利用 NI-means 算法可以在空域更好地解决一直以来都是在小波域解决的小波图像修补问题。



11.a 原始图像  
11.a original image

11.b 缺损图像  
11.b damaged image

11.c 本文算法修补结果  
11.c result using our algorithm

图 11 简单图形图像。

Fig. 11 Image containing simple shapes.



12.a 原始图  
12.a original image

12.b 缺损图像  
12.b damaged image

12.c 本文算法修补结果  
12.c result using our algorithm

图 12 Lena 图像。

Fig. 12 Image of Lena.



13.a 原始图

13.a original image



13.b 缺损图像

13.b damaged image



13.c 本文算法修补结果

13.c result using our algorithm

图13 Barbara 图像。

Fig. 13 Image of Barbara.

## 4 总结

本文简要的叙述了空域和小波域的图像修补问题及其技术发展,提出空域解决小波域图像修补问题的思想。文章引入非局部方法,提出了实现本文思想的非局部方法。实验表明,本文修补方法的修补效果更好,显著提高图像的峰值信噪比,该思想是有其可行性的。按照本文思路,可以进行更加深入的研究,设计实验发现那些适用于解决小波图像修补问题的空域修补算法;图像纹理部分的修补也是需要改进的地方;同时,修补实现速度方面也亟待提高。

## 参考文献

### References

- [1] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles and C. Ballester. Image Inpainting[J]. Proceedings of SIGGRAPH 2000, New Orleans, USA, July 2000.
- [2] T F Chan, J Shen. Non-Texture Inpainting by Curvature-Driven Diffusion(CDD)[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2001,12: 436~449.
- [3] T F Chan, J H Shen. Mathematical models for local non-texture inpainting[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 2001, 62 (3):1019~1043.
- [4] T F Chan, S H Kang, J H Shen. Euler's elastica and curvature based inpainting[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 2002,63 (2) : 564~592.
- [5] Tsai A, Yezzi J A, Willsky A S. Curve evolution implementation of the Mumford-Shah functional for image segmentation, denoising, interpolation and magnification[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10 (8) : 1169~1186.
- [6] Eshedoglu S, Shen J H. Digital inpainting based on the Mumford-Shah-Euler image model[J]. European Journal on Applied Mathematics, 2002, 13 (4) : 353~370.
- [7] Wim Sweldens. Wavelet, Signal compression and image processing[C]. ACM SICCRAPH94,

- 1994.
- [8] 李敏,冯象初.基于全变差和小波方法的图像去噪模型[J].西安电子科技大学学报.2006, 12: 980~984.
- [9] L. Zhang, B. Paul, et al. Threshold analysis in wavelet-based denoising[J]. Electronics Letters, 2001, 9(37): 1485~1486.
- [10] 郝彬彬,冯象初.一种基于小波和尺度型扩散的带噪图像放大方法[J]. 西安电子科技大学学报. 2007: 654~658.
- [11] Chan Tony,Shen Jianhong,Zhou Hao-Min.Total variation wavelet inpainting[J].Journal of Mathematical Imaging and Vision[J].2006, 7(25): 107~125(19)
- [12] Xiaoqun Zhang,Tony F. Chan.Wavelet Inpainting by Nonlocal Total Variation.July 23, 2009.
- [13] Antoni Buades, Bartomeu Coll, Jean-Michel Morel. A non-local algorithm for image denoising.in Proc. Int. Conf. Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR),2005, 2: 60~65.
- [14] A. Buades, B. Coll, J. M. Morel, A review of image denoising algorithms, with a new one. Multiscale Model. Simul. , 2005, 4(2): 490~530.