0.1 引言

卡西米尔效应：卡西米尔效应是由荷兰物理学家亨德里克.卡西米尔在1948年提出来的。卡西米尔效应效应是关于电磁场真空能量的可观测效应。真空能量本身不可观测，但它的变化可以观测。简单的说，卡西米尔效应是真空中两片平行放置的无限大电中性导体板的吸引作用。这种作用是纯量子作用，因为在经典电动力学中两块电中性导体板之间没有作用力。所以只有量子化电磁场的真空态引起了两块平板的吸引作用。按照卡西米尔的预测，两片无限大电中性的理想导体在零温时，两板之间的压强为

$$P\left(a\right) = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}$$

其中，c是光速，a是两板之间的距离。对于a=1um(这个距离相对于原子尺度已经是很大了)，可得P=1.3mPa，压强是宏观量。可见，量子真空态引起了可观测的宏观效应。对于理想的导体，电场只有垂直于导体平板的方向，但对于对于实际中的导体，平板切向方向的电场不严格为零，因此要对上式做一些修正，这时卡西米尔力就会依赖与电子的电量和其它参数。

卡斯米尔效应起因于普朗克引入的半个量子half-quanta。在量子场论中，任何量子化的场，比如电磁场，都可以看成是一系列各种频率的量子谐振子的集合。场中的每一点可以看成是量子谐振子的集合，集合中振荡着的振子有各种允许的频率和量子数n。对于某一个频率，量子数不为零的量子态，都是量子场在该频率下的激发态。由于量子谐振子存在零点振动和零点能，$E_0 = \hbar\omega/2$，因此量子电磁场的真空态也存在零点振动和零点能。量子电磁场的基态能量为

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}\sum_J \omega_J$$

其中J为场的模式。很明显，上式的求和为绝对发散，因此电磁场的基态真空能量为无限大。基态能量为无穷大，那么在闵科夫斯基空间，物理能量就要从无穷大开始。处理无穷大经常用的方法是，将基态能量设为零，或者是使用正规乘积的方法，即让产生算符总是在湮灭算符的左边。

虽然电磁场无穷大的基态能经常被我们人为的去掉，但在一些情况下，如存在物质边界时，基态能就不能被去任意掉，这时真空零点能出现可观测的效应。先来看谐振子的基态能的观测情况。谐振子的基态能在几种量子态之间的跃迁，如散射试验中中，不能被观测到。但在谐振子的频率依赖于某些经典的常数，或量子系统外的常数时，就会表现出来。早在1919年，真空能就被用来成功解释不同同位素之间的蒸汽压力问题。在这种情况下，不同同位素的质量起到了外参数的作用，质量不同就会导致量子振子的频率不同，即不同的同位素量子振子具有不同的零点能，这种零点能的变化起到了作用。对于量子电磁场也是相同，量子化后的场是无穷谐振子的叠加，如果振子的频率依赖于外界的参数，随外界参数的改变而变化，就会导致量子场真空能量的改变，这种能量的改变引起可观测的效应。在两片无限大的金属平板中，场振子的频率依赖于两板之间的距离a，随着距离的绝热改变，这些真空态也会连续变化，这时在几种量子态跃迁过程中，仍把真空能定义为零就不对了。对于不同距离的理想导体平板，就会出现无穷系列不同的真空态。在这里，两板间的距离起到了量子系统中同位素的质量的作用，是一个量子系统外的经典参数。正是这种两个平板间的无穷大的零点能与自由空间中的无穷大能量的差别导致了卡西米尔效应的发生，也就是导致了零点能的观测效应。与电磁场零点能相关的效应还有氢原子的Lamb兰姆移动，氢原子的$2^2S_{1/2}$能级比$2^2P_{1/2}$高。

卡斯米尔效应也被称作是延迟的范德瓦尔斯力，没看懂。范德瓦尔斯力也是和真空零点能有关。涨落的电磁场导致了分子或原子中瞬时的电偶矩，因此，电偶矩算符的散度不为零。事实上，涨落的电磁场可以看作是零点振动的模型。对于属于不同的宏观物体空间上离得很近的两个或多个原子，一个原子发出一个虚光子，这个虚光子能够在它的寿命内到达另一个原子，这种相干的振动引起了原子中瞬时的电偶矩，导致了范德瓦尔斯力的产生。范德瓦尔斯力是纯量子作用，因为它依赖于普朗克常数，但与光速c无关，因此是非延迟的范德瓦尔斯力。

我们再来考虑原子间的距离比较大，虚光子不能在它的生命中到达另一个原子的情况。这种情况首先由卡西米尔和Polder来研究的，他们研究了胶体中的范德瓦尔斯力。在大距离情况下，非延迟的范德瓦尔斯力不存在了。但是这两个原子所在点的量子场的真空态的相干不为零，这样又导致了原子间电偶矩的相干振动，结果是两个原子间存在了吸引作用。这种作用，以卡西米尔和Polder命名，不仅是量子的，而且还是相对论的，它依赖于普朗克常数和光速。有时称它为延迟的范德瓦尔斯力。并且这种

相对论效应在原子间距增大时增强，在原子间距为几百个纳米时占主要作用。这种原子间（分子间）的推迟力导致了一个原子（分子）与一个宏观物体或宏观物体间相似的作用力。从这种角度分析，物体边界间的卡西米尔力也被认为是延迟的范德瓦尔斯力。

1 卡西米尔效应的简单模型

1.1 The scalar Casimir effect on an interval标量场中一段区间上的卡西米尔效应

我们来考虑二维时空中的标量场，即标量场依赖与时间t和一维坐标x。它满足Klein-Fock-Gordon方程

$$\Box_2\varphi(t,x)+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi(t,x)=0 \tag{1}$$

其中，m是场的质量，$\Box_2$是二维的达朗贝尔算符

$$\Box_2\varphi(t,x)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} \tag{2}$$

$\varphi(t,x)$是无量纲的。

现在我们来考虑具有狄利克雷边界条件的一段区间[0,a]内标量场的性质。狄利克雷边界条件为

$$\varphi(t,0)=\varphi(t,a)=0 \tag{3}$$

然后我们再研究整个x轴上标量场的性质。定义场方程的两个解f,g的标量积为

$$(f,g)=i\int_0^a dx\left(f^*\frac{\partial g}{\partial x_0}-\frac{\partial f^*}{\partial x_0}g\right) \tag{4}$$

其中$x_0=x^0=ct$。利用1式，可以证明f,g的标量积(f,g)与时间无关，即

$$\frac{d(f,g)}{dt}=0$$

满足边界条件并且满足正交归一条件的具有正，负频率的场方程的解为

$$\varphi_n^{(\pm)}(t,x)=\left(\frac{c}{a\omega_n}\right)^{1/2}e^{\mp i\omega_n t}\sin k_n x \tag{5}$$

$$k_n=\frac{n\pi}{a},n=1,2,3,...$$

其中正交归一化条件为

$$\left(\varphi_n^{(\pm)},\varphi_{n'}^{(\pm)}\right)=\pm\delta_{nn'} \tag{6}$$

$$\left(\varphi_n^{(\pm)},\varphi_{n'}^{(\mp)}\right)=0$$

将场方程的解3代人1，可得频率

$$\omega_n=\left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2}+c^2k_n^2\right)^{1/2} \tag{7}$$

可以证明，ω_n就是将场二次量子化后谐振子的频率。由于场量子化后可以看成是一系列谐振子的叠加，因此，[0,a]区间内场的真空能为

$$\begin{aligned}E_0(a,m)&=\frac{\hbar}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\\&=\frac{\hbar}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2}+c^2k_n^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{8}$$

我们再来看定义在整个x轴$-\infty < x < \infty$上的场能量。这时满足Klein-Fock-Gordon场方程的两个解的标量乘积定义为

$$(f,g) = i\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(f^* \frac{\partial g}{\partial x_0} - \frac{\partial f^*}{\partial x_0} g\right) \tag{9}$$

与4式相似，只是积分限不同。场方程解的正交归一化条件修改为

$$\begin{aligned} \left(\varphi_k^{(\pm)}, \varphi_{\acute{k}}^{(\pm)}\right) &= \pm\delta\left(k - \acute{k}\right) \\ \left(\varphi_k^{(\pm)}, \varphi_{\acute{k}}^{(\mp)}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

这样，满足正交归一化条件具有正负频率的场方程的解为

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(\pm)}(t,x) &= \left(\frac{c}{4\pi\omega_k}\right)^{1/2} e^{\mp i(\omega_k t - kx)} \\ -\infty &< k < \infty \end{aligned} \tag{11}$$

这时振子的频率是连续的，

$$\omega_k = \left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2} + c^2k^2\right)^{1/2} \tag{12}$$

这样整个x轴上的场的真空能为

$$\begin{aligned} E_{0M}(m) &= \frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\omega_k L \\ &= \frac{\hbar}{2\pi}\int_0^{\infty} dk \left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2} + c^2k^2\right)^{1/2} L \end{aligned} \tag{13}$$

L是x轴的长度，被称为是归一化长度。引入L是为了标志这是整个轴上的总能量。但不明白为什么要引入$\frac{dk}{2\pi}$。下脚标M意味着这是没有边界的一维空间和一维时间，是自由的闵科夫斯基时空的一种简单对等情况。对比可知，在自由场中附加物质或边界条件后，场的真空能将改变，这种真空能的改变引起的效应即为卡斯米尔效应。

显然，标量场一段区间上真空能和整个轴上的真空能的表达式8式和13式都是无穷大发散的。这些表达式是卡西米尔效应理论中的标准起点。为了有效的处理无穷大，我们必须把它们变成有限大。这就需要重整化过程。关于重整化有很多方法，我们在这里采用最简单的一种办法。具体做法为，在8式和13式中的求和号和积分号后分别引入切断函数$e^{-\delta ck_n}$和$e^{-\delta ck}$，其中$\delta > 0$是一个参数。在得到有限大量物理量后，通过令$\delta \longrightarrow 0$来去掉重整化。需要说明的是，重整化后得到的结果不依赖于重整化过程中所采用切断函数的具体形式。

现在我们对8进行重整化。为了简单，我们来考虑质量为零m=0的情况。从8我们得到了重整化后没有质量的标量场中在一段区间（0,a）内的真空能

$$E_0^{(\delta)}(a) = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{a} \exp\left(-\delta\frac{cn\pi}{a}\right) = \frac{\pi\hbar c}{8a}\sinh^{-2}\frac{\delta c\pi}{2a} \tag{14}$$

这时的真空能为有限值，但在$\delta \longrightarrow 0$时发散。在$\delta \longrightarrow 0$的极限下，通过泰勒展开我们得到了

$$E_0^{(\delta)}(a) = \frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2} - \frac{\pi\hbar c}{24a} + O\left(\delta^2\right) \tag{15}$$

这时的真空能表示两项的相加，其中一项有奇点无穷大，另一项为有限大。

我们再对整个x轴上的真空能进行重整化。仍令m=0，通过引入切断函数我们得到了重整化后整个x轴上的真空能

$$E_{0M}^{(\delta)} = \frac{\hbar c}{2\pi}\int_0^{\infty} kLe^{-\delta ck}dk = \frac{\hbar L}{2\pi c\delta^2} \tag{16}$$

现在我们来计算分布在（0,a）区间，但在端点x=0,x=a并不存在边界条件的真空能。

$$E_{0M}^{(\delta)}(a)=\frac{E_{0M}^{(\delta)}}{L}a=\frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2} \tag{17}$$

这时的能量与存在边界条件区间中的能量重整化后得到的结果15式中的第一项完全相等，都在$\delta\longrightarrow 0$时发散。

我们说卡斯米尔效应是由于在场中加入物质，或引入边界条件后，改变了原来场的分布情况，导致真空能发生变化引起的。在（0,a）区间内，引入边界条件前后，真空能的改变为

$$E^{(\delta)}(a)\equiv E_0^{(\delta)}(a)-E_{0M}^{(\delta)}(a)=-\frac{\pi\hbar c}{24a}+O\left(\delta^2\right) \tag{18}$$

通过去掉重整化，我们得到了区间内的卡西米尔能

$$E(a)=\lim_{\delta\longrightarrow 0}E^{(\delta)}(a)=-\frac{\pi\hbar c}{24a} \tag{19}$$

19式对于满足一些普遍条件的任何重整化函数都是成立的，即19不依赖所选用的重整化函数。由19式，我们得到了边界点之间的作用力，即卡斯米尔作用力

$$F(a)=-\frac{\partial E(a)}{\partial a}=-\frac{\pi\hbar c}{24a^2}$$

可见，两个边界点之间的卡斯米尔力是吸引力。

我们再来考虑另一种边界条件情况。在x=0处满足狄里克雷边界条件,在x=a处满足诺埃曼（Neumann）边界条件

$$\varphi(t,0)=\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\mid_{x=a}=0 \tag{20}$$

这种边界条件叫做混合边界条件。满足此边界条件的正交归一解与5式具有相同的形式，只是

$$k_n=\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right),n=0,1,2,...$$

对于没有质量的情况，通过以上相同的方法，可得重整化后区间内的真空能为

$$E_0^{(\delta)}(a)=\frac{\hbar}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{\delta c\pi(2n+1)}{2a}\right)=\frac{\pi\hbar c}{8a}\coth\frac{\delta c\pi}{2a}\operatorname{csc h}\frac{\delta c\pi}{2a}$$

在δ很小的条件下，通过泰勒展开我们得到了

$$E_0^{(\delta)}(a)=\frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2}+\frac{\pi\hbar c}{48a}+O\left(\delta^2\right) \tag{21}$$

发散项与15式中的第一项，发散项完全相同，都等于自由空间中真空能的贡献。因此，可得混合边界条件下的卡西米尔能为正值，

$$E(a)=\lim_{\delta\longrightarrow 0}\left[E_0^{(\delta)}(a)-E_{0M}^{(\delta)}(a)\right]=\frac{\pi\hbar c}{48a}$$

这样得到的两个端的的卡西米尔作用力为斥力

$$F(a)=-\frac{\partial E(a)}{\partial a}=\frac{\pi\hbar c}{48a^2}$$

1.2 Abel-Plana公式和重整化

在卡西米尔效应中，我们经常要遇到求和积分，在一些情况下如果应用Abel-Plana公式，问题就会简化一些。Abel-Plana公式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(t)\,dt = \frac{1}{2}F(0) + i\int_0^{\infty}[F(it) - F(-it)]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \tag{22}$$

其中$F(z)$在右半平面解析。

为了说明Abel-Plana公式的用途，现在我们将它应用到无质量的标量场中来计算一段区间内的卡西米尔效应。在我们以上的计算中

$$F(n) = \frac{\hbar}{2}\omega_n f(\omega_n, \delta)$$

其中ω_n是由7决定的（0，a）区间内谐振子的频率。$f(\omega_n, \delta)$是切断函数，并且切断函数满足随着ω的增大，切断函数单调下降的足够快以至于22式中的求和和积分项都收敛：对于所有的

$$\delta \neq 0 \omega \longrightarrow \infty f(\omega, \delta) \longrightarrow 0$$

并且切断函数自身要满足

$$f(\omega, \delta) \leq 1, f(\omega, 0) = 1$$

由于这种积分是指数形式的快速收敛积分，因此允许在积分下取$\delta \longrightarrow 0$的极限情况。这样，在$\delta \longrightarrow 0$的极限下，22式中的右边不再依赖与切断函数的具体形式。因此，在计算中我们经常省略切断函数，同时，22式所得的结果与切断函数具体形式无关也就自动满足了。对于所有应用Abel-Plana公式的情况都是成立的，并不只限于我们计算卡西米尔效应中。

我们现在来具体应用Abel-Plana公式。

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar}{2}\omega_n = \frac{mc^2}{2} + \frac{\hbar}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n = \frac{mc^2}{2} + E_0(a, m)$$

其中$F(0) = \frac{mc^2}{2}, E_0(a,m)$是我们上面所定义的（0，a）区间内的真空能。再用相似的办法来考虑$\int_0^{\infty} F(t)\,dt$。令$ak = \pi t$

$$\begin{aligned} E_{0M}(m) &= \frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\omega_k L \\ \int_0^{\infty} F(t)\,dt &= \hbar\int_0^{\infty}\frac{dt}{2}\omega_t \\ &= \hbar\int_0^{\infty}\frac{a\,dk}{2\pi}\omega_k \\ &= \frac{a}{L}E_{0M}(m) = E_{0M}(a, m) \end{aligned}$$

因此，卡西米尔能$E(a,m) \equiv E_0(a) - E_{0M}(a)$可以通过Abel-Plana公式直接计算。这样我们就得到了已经去掉重整化后的卡西米尔能

$$\begin{aligned} E(a,m) &= -\frac{mc^2}{4} + i\int_0^{\infty}[F(it) - F(-it)]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \\ &= -\frac{mc^2}{4} + i\frac{\pi\hbar c}{2a}\int_0^{\infty}[G_A(it) - G_A(-it)]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \end{aligned} \tag{23}$$

其中

$$F(t) = \frac{\hbar}{2}\omega_t = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2} + c^2t^2\right)^{1/2}$$

$$G_A(t) \equiv \left(A^2 + t^2\right)^{1/2}, A = \frac{mca}{\pi\hbar}$$

先来考虑普遍的函数形式$G_A^{(\alpha)}(z)$。

$$G_A^{(\alpha)}(z) = e^{\alpha \ln\left(A^2+z^2\right)}$$

显然，$G_A^{(\alpha)}(z)$有两个节点，$z_{1,2} = \pm iA$，通过围绕节点，by going around the branch points,可以证明

$$G_A^{(\alpha)}(it) - G_A^{(\alpha)}(-it) = 2ie^{\alpha \ln\left(t^2-A^2\right)} \sin(\pi\alpha)\,\theta(t-A)$$

其中为$\theta(t-A)$阶跃函数。对于$\alpha = 1/2$的情况，也就是我们需要的情况，可得

$$G_A(it) - G_A(-it) = 2i\left(t^2-A^2\right)^{\frac{1}{2}} \theta(t-A)$$

将此式带入23，我们得到了

$$E(a,m) = -\frac{mc^2}{4} - \frac{\pi\hbar c}{a}\int_t^\infty \left(t^2-A^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \tag{24}$$

$$= -\frac{mc^2}{4} - \frac{\hbar c}{4\pi a}\int_{2\mu}^\infty \frac{\sqrt{y^2-4\mu^2}dt}{e^y-1} \tag{25}$$

其中$2\pi t \equiv y, \pi A = mca/\hbar \equiv \mu$其中$\mu$代表了没有量纲的质量，上式中的第一项和边界点的总能量相关，由于它不含参数a，因此对卡西米尔力没有贡献。

对于质量为零m=0,即$\mu = 0$，通过上式可得

$$E(a,0) = -\frac{\hbar c}{4\pi a}\int_0^\infty \frac{ydt}{e^y-1} = -\frac{\pi\hbar c}{24a^2} \tag{26}$$

与以前得到的结果完全相同。对于质量很大的情况，即$\mu \gg 1$时，可得

$$E(a,m) = -\frac{mc^2}{4} - \frac{\hbar c\sqrt{\mu}}{4\sqrt{\pi}a}e^{-2\mu} = -\frac{\pi\hbar c}{24a^2} \tag{27}$$

与距离a相关的项很小。上式对于有质量场中自旋为0,1/2,1的三维时空场中的两个平行板中的情况仍然是成立的，但这只适用于平面边界情况。如果边界或空间中存在弯曲情况，卡西米尔能将依赖与质量，与系统的几何性质，如曲率半径相关。

对于标量场中的混合或反周期边界条件，或自旋场，求和中包含半整数，Abel-Plana公式修改为

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n+\frac{1}{2}\right) - \int_0^\infty F(t)\,dt = -i\int_0^\infty \left[F(it) - F(-it)\right]\frac{dt}{e^{2\pi t}+1} \tag{28}$$

1.3 The scalar Casimir effect on a circle

当空间的拓扑不平庸时，需要将一些标识条件identification conditions加在场上。这些标识条件与经典物质边界的边界条件相似。最简单的例子是对于$0 \le x \le a$区间，边界点x=0,x=a,满足以下的周期性边界条件

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,a), \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\mid_{x=0} = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\mid_{x=a} = 0 \tag{29}$$

满足以上边界条件的区间的几何图像为半径是a的圆。与我们上面所考虑的情况的流形都是平面，但它们的拓扑情况不同。[0，a]区间的拓扑为欧几里得拓扑，29情况的拓扑为S^1.对于满足12的标量场，对于S^1与3情况不同，在3中，$\varphi(t,0) = \varphi(t,a) = 0$，而在29情况的拓扑为$S^1$情况中，在x=0,x=a处，$\varphi \neq 0$。

边界条件满足29式的标量场的正交完备解为

$$\varphi_n^{(\pm)}(t,x) = \left(\frac{c}{2a\omega_n}\right)^{1/2} e^{\mp i(\omega_n t - k_n x)} \tag{30}$$

$$\omega_n = \left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2} + c^2k_n^2\right)^{1/2}$$

$$k_n = \frac{2n\pi}{a}, n = 0, \pm1, \pm2... \tag{31}$$

对比可知，k_n的取值与5式不同。

在圆中的真空能为

$$E_0(a,m) = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n \tag{32}$$
$$= \hbar\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n - \frac{\hbar}{2}\omega_0 = \hbar\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n - \frac{mc^2}{2}$$

我们来计算标量场圆圈中的卡西米尔能

$$E(a,m) \equiv E_0(a,m) - E_{0M}(a,m) \tag{33}$$
$$= -\frac{mc^2}{2} + \hbar\left(\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n - \frac{a}{2\pi}\int_0^{\infty}dk\omega_k\right)$$
$$= -\frac{mc^2}{2} + \frac{2\pi\hbar c}{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{B^2+n^2} - \int_0^{\infty}\sqrt{B^2+t^2}dt\right)$$

其中$B = mac/(2\pi\hbar)$，$2\pi t = ak$。33式应用Abel-Plana公式，可得

$$E(a,m) = -\frac{mc^2}{2} + \frac{2\pi\hbar c}{a}\left[\frac{1}{2}F(0) + i\int_0^{\infty}[F(it) - F(-it)]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\right] \tag{34}$$
$$[F(it) - F(-it)] = 2i\sqrt{t^2-B^2}$$
$$E(a,m) = -\frac{mc^2}{2} + \frac{2\pi\hbar c}{a}\left[\frac{1}{2}B - 2\int_B^{\infty}\frac{\sqrt{t^2-B^2}dt}{e^{2\pi t}-1}\right]$$
$$= \frac{4\pi\hbar c}{a}\int_B^{\infty}\frac{\sqrt{t^2-B^2}dt}{e^{2\pi t}-1}$$
$$= -\frac{\hbar c}{\pi a}\int_{\mu}^{\infty}\frac{\sqrt{y^2-\mu^2}dy}{e^y-1}$$

其中利用了$2\pi t \equiv y, 2\pi B = mca/\hbar \equiv \mu$其中$\mu$代表了没有量纲的质量。与24对比，可知34中没有包含与质量成正比的项。物理上的解释为圆的拓扑不包含边界点，因此真空能不包含边界点的贡献。

对于没有质量的标量场，可得卡西米尔能为

$$E(a,0) = -\frac{\hbar c}{\pi a}\int_0^{\infty}\frac{ydy}{e^y-1} = -\frac{\pi\hbar c}{6a}$$

在大质量情况下，即$\mu \gg 1$时，可得

$$E(a,m) = -\frac{\hbar c\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi}a}e^{-\mu} \tag{35}$$

可见，卡西米尔能是指数形式的小量。

对于反周期的情况，即边界条件满足

$$\varphi(t,x+a) = -\varphi(t,x)$$

可得

$$\varphi_n^{(\pm)}(t,x) = \left(\frac{c}{2a\omega_n}\right)^{1/2}e^{\mp i(\omega_n t - k_n x)}$$
$$\omega_n = \left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2} + c^2k_n^2\right)^{1/2}$$
$$k_n = \frac{2\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right), n = 0, \pm1, \pm2, ..$$

在质量为零的情况下，可得

$$\omega_n = \frac{2\pi c}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

利用Abel-Plana公式，可得反周期边界条件下的卡西米尔能为

$$E\left(a,0\right) = \frac{\pi \hbar c}{12a}$$

与混合边界情况下相似，此时的卡西米尔能为正值，因此卡西米尔力为排斥力。

对于反周期的边界条件，在转两圈的情况下回到原来的情况，

$$\varphi\left(t, x+2a\right) = \varphi\left(t, x\right)$$

这种边界条件的几何图形为莫比乌斯带。其实自旋波函数就是反周期的，只有在转过两圈4π角度后才能回到原来的出发点。满足反周期边界的情况被称作是扭曲的twisted.

1.4 Elementary approach to the Casimir forece between two parallel planes

以前我们所考虑的都是二维时空卡西米尔效应的简单模型。现在我们来研究一下两块平行放置的理想导体之间的卡西米尔作用。两块平行放置的导体板，导体板的面积为S，两板间的距离为a,并且S>>a。根据经典电动力学，电场和磁场满足以下的边界条件

$$E_t\left(t,r\right)|_S = B_n\left(t,r\right)|_S = 0$$

其中，下脚标t表示切线方向，平行于导体板，n表示法线方向，垂直于表面。即，对于处于电磁场中的理想导体板，电场的切向分量为零，磁场的法线方向分量为零。这意味电磁场只能存在于理想导体之外。其实，这种边界条件可以看成是电磁场与实际导体相互作用的理想情况。在一般情况下，这种相互作用非常复杂，并且由于导体的电导率有限大，这样就导致了电磁场在导体表面有一定的穿透深度。

电磁场可以看成是无穷系列频率是ω_J的谐振子的叠加，其中J是光子的波矢。在自由空间，$\mathbf{J} = \mathbf{k} = \left(k^1, k^2, k^3\right)$，所有的$k^i$是连续的。但是当有金属存在时，就不是这样。以后我们用$x^{1,2,3}$表示x,y,z,用$k^{1,2,3}$表示k_x, k_y, k_z。我们选择笛卡尔坐标系，并且令z轴垂直于平行板。这样，当电场方向垂直于金属板而磁场方向平行于金属板时，满足边界条件，这时的电磁波沿x或y方向自由传播，因此，k_x, k_y是连续的。但当电磁波沿z轴方向传播时，要满足边界条件，因此是k_z离散的，并且$k_z = k_{zn} = \frac{n\pi}{a}, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$。与以前所说的一段区间内的情况相比，n可以为负整数，因为这是考虑了双光子的极化。并且波矢$(k_x, k_y, 0)$的贡献不为零，即这时只有平行于金属板传播的电磁波。

两个理想导体板之间的电磁场的真空能为

$$\begin{aligned} E_0\left(a\right) &= \frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_x}{2\pi}L_x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_y}{2\pi}L_y\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_{k_\perp n}\omega_k S \\ &= \frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_y}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_{k_\perp n}\omega_k S \end{aligned}$$

其中$k\perp = (k_x, k_y)$是波矢在金属板表面的投影。$k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$，振子的频率

$$\omega_J = \omega_{k\perp n} = c\sqrt{k_\perp^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

这样

$$E_0\left(a\right) = \frac{\hbar}{2}\int_0^{\infty}\frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi}\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{k\perp n} - ck_\perp\right)S$$

自由空间中，两个平行板之间(不存在任何边界条件)内电磁场的真空能为

$$
\begin{aligned}
E_{0M}(a) &= 2\frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_x}{2\pi}L_x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_y}{2\pi}L_y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}a\omega_k \\
&= a\hbar S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_y}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\omega_k \\
\omega_k &= c\left|\mathbf{k}\right| = c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}
\end{aligned}
$$

其中，因子2代表了两种极化方式的电磁场。将上式改写为

$$
E_{0M}(a) = \frac{\hbar a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi}\int_0^{\infty}dk_z\omega_k S
$$

单位面积上的卡西米尔能为

$$
\begin{aligned}
E(a) &\equiv \frac{E_0(a)}{S}-\frac{E_{0M}(a)}{S} \\
&= \hbar\int_0^{\infty}\frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{k\perp n}-\frac{ck_\perp}{2}-\frac{a}{\pi}\int_0^{\infty}dk_z\omega_k\right) \\
&= \hbar\int_0^{\infty}\frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}c\sqrt{k_\perp^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}-\frac{ck_\perp}{2}-\frac{a}{\pi}\int_0^{\infty}dk_z\omega_k\right) \\
&= \frac{\hbar\pi c}{a}\int_0^{\infty}\frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\left(k_\perp^2\right)a^2}{\pi^2}+n^2}-\frac{ak_\perp}{2\pi}-\int_0^{\infty}dt\sqrt{\frac{\left(k_\perp^2\right)a^2}{\pi^2}+t^2}\right)
\end{aligned}
$$

其中$t=\frac{a}{\pi}k_z$。利用Abel-Plana公式，令$A=\frac{\left(k_\perp^2\right)a^2}{\pi^2}$，可得两个平板间的卡西米尔能为

$$
E(a) = -\frac{\pi^2\hbar c}{a^3}\int_0^{\infty}ydy\int_y^{\infty}\frac{\sqrt{t^2-y^2}dt}{e^{2\pi t}-1}
$$

其中$y=k_\perp a/\pi$。交换积分顺序，令$v=2\pi t$，可得两个理想金属板之间的卡西米尔能为

$$
\begin{aligned}
E(a) &= -\frac{\pi^2\hbar c}{a^3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\int_0^{t}y\sqrt{t^2-y^2}dy \\
&= -\frac{\pi^2\hbar c}{3a^3}\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty}\frac{v^3dv}{e^v-1} \\
&= -\frac{\pi^2\hbar c}{720a^3}
\end{aligned}
$$