

认知与无穷

彭海杰

2010.1009

从认知的角度来说，为保证比较的有效性，在比较两个事物时，应首先保证所比较的两个事物具有可比性：即它们应当是同类的，并且在比较时采用相同的度量方法。这是对度量（认知比较）的操作性描述。

对于任何事物，可以记为 $i = P_i$ 的形式，其中 i 是一个符号，用于标记事物（不同的事物， i 不相同，这本质上体现的是唯一性，因此 i 可以用自然数符号来表示）。 P_i 表示事物 i 的整体属性。比较事物 i 和事物 j 的不同就是比较 P_i 和 P_j 的不同。由于可分性是事物的普遍属性，因此 P_i 可表示为不同子属性 p_1, p_2, \dots, p_k 的集合，其中 k 为自然数符号，（需要注意的是，由于可能无法穷举事物的全部子属性，因此存在 $k \rightarrow \infty$ 的情形），在不导致歧义的情况下，将 p_k 称作第 k 类属性。由于事物总是存在于时间和空间中，因此所有属性的度量和属性的组合的度量必然具有时序和空间属性，因此按序组 (p_1, p_2, \dots, p_k) 进行的度量只是所有可能度量方式中的一种。这时，所有可能度量方式有 $\sum_{m=1}^k \mathcal{P}_k^m$ 种，其中 \mathcal{P}_k^m 表示 k 中取 m 个的排列。对于序组 (p_1, p_2, \dots, p_m) 表示的度量，当 $m < k$ 时，称这个度量为部份度量，当 $m = k$ 时，称为整体度量。这时，一种度量方式下的等价结论并不能推导出所有其余度量方式也可得出等价的结论。如果不同属性之间相互独立，那么称序组 (p_1, p_2, \dots, p_k) 表示的度量为满度量，记为 $P_i^0 = (p_1, p_2, \dots, p_k)_0$ 。如果属性间存在依赖关系，则可以将依赖项写在被依赖项的左边，同级的、相互间无依赖的项用“[”和“]”号括起来。

在人们表示无穷的时候，为了理解上的方便，通常采用基数和序数来表达无穷。但是人们常常将基数和序数相互替换，而没有意识到基数和序数在度量上存在差异。

抽象的基数之间、序数之间的比较仅考虑量的多少，因此抽象的基数及序数都可表示为 (\langle, b) 的方式。其中 b 表示没有任何属性的符号，“ \langle ”表示 b 的一个偏序（因此， b 可以用自然数符号表示）。但是在通常的表示中，往往使用具体对象来表示，而具体对象具有属性（如单位、尺度、...），这时的基数记为 $B = (\langle, b, \text{尺度})$ 。所以比较两个具体基数的前提是必须保证表示被比较的两个基数具有相同的属性（这就是通常所谓的单位）。相似的，序数可被表示为 $ORD = (\langle, \text{ord}, [\text{尺度}, \text{起点}, \text{方向}])$ 。因此，不同的序数将由于尺度、起点、方向任一项的不同而导致不可比，这时的序数可理解为向量。显然，序数和基数之间不具有可比性。由于基数表示是序数表示的一部分，因此，在不考虑任何其他属性（如起点和方向）时，序数可等同于基数，如果还不考虑尺度，那么序数和基数仅仅就是数，只不过是一种符号。

接下来让我们考查康托证明实数不可数时所用的对角线法。首先，[A]康托将基数“转换”为（水平射线）序数，[B]然后再从（水平射线）序数构造（对角线）序数，[C]然后再将（对角线）序数“转换”为（对角线）基数，[D]然后比较（对角线）基数和（水平射线）基数。[A]、[B]、[C]、[D]过程中由于存在不同的属性（起点、方向、尺度不同）以及[B]中构造方法的随意性，因而这些数不具有可比性。这表明康托的对角线法存在认知缺陷。

由于可数概念本身只涉及量的多少是否相同，因此不涉及具体的属性，所以对“可数”的度量就不能引入任何除个数之外的属性和比较个数的过程之外的度量方法。所以实数是否可数仅涉及符号（实数表示）与符号（可数数表示）之间的一一对应关系。于是，在这里，数只是符号，甚至都没有序的属性。由于符号（无论是实数表示还是可数数表示）是无穷多的，而符号（实数表示）和符号（可数数表示）之间总可以一一对应（用一对一剔除方式），因此在实数表示和可数数表示之间做可数度量时不存在个数上的差异（即一个有，另一个没有的情形。否则这意味着其中一个是有限的），因此，实数表示和可数数表示具有相同的可

数性，即实数是可数的。

如果一定要考虑数的势，那么也只有在用某种方式区分这些数的势时才能进行比较。由于度量总是对应于某一序组，因此数的势实际上是我们所熟知的维度。

基于认知论的方法有助于理解芝诺悖论、罗素悖论和理发师悖论产生的根源。发生这些悖论的原因通常在于无恒定属性或属性混乱：芝诺悖论是尺度逐渐变小（在认知过程的每一个阶段，都有意忽略乌龟与阿基里斯之间的距离与恒定相对速度的固定比值）；罗素悖论是集合的大小逐渐变大（随着认知过程的进行，集合所包含子集的个数变为无穷大）；理发师悖论是属性发生了摇摆（在认知的过程中，被理发的人群中或者包括理发师或者不包括理发师）；说谎者悖论可视为理发师悖论的特殊情形（结论的真假随着认知过程的进行而发生翻转）。