

题目：求无阻尼弹簧(k)-质量(m)系统对图 1 所示斜坡阶跃力的响应

解：斜坡阶跃力可表示

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & t \geq t_1 \\ f_0 \frac{t}{t_1} & 0 < t < t_1 \end{cases}$$

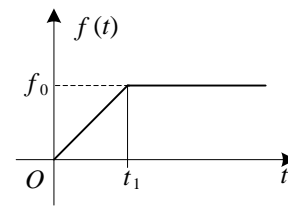


图 1 带斜坡阶跃力

因此

$$\dot{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \geq t_1 \\ \frac{f_0}{t_1} & 0 < t < t_1 \end{cases}$$

当 $0 \leq t \leq t_1$ 时，由式根据杜哈美积分公式有

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \dot{f}(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{f_0}{t_1} \frac{1}{k} [1 - \cos p(t-\tau)] d\tau \\ &= \delta_{st} \left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1} \right) \end{aligned}$$

其中 $\delta_{st} = \frac{f_0}{k}$ 。当 $t > t_1$ 时有

$$x(t) = \int_0^{t_1} \frac{f_0}{t_1} \frac{1}{k} [1 - \cos p(t-\tau)] d\tau = \delta_{st} \left[1 + \frac{\sin p(t-t_1) - \sin pt}{pt_1} \right]$$

将上述两个时间段合在一起得到系统的响应。图 2 给出了一组典型 t_1 所对应的响应。

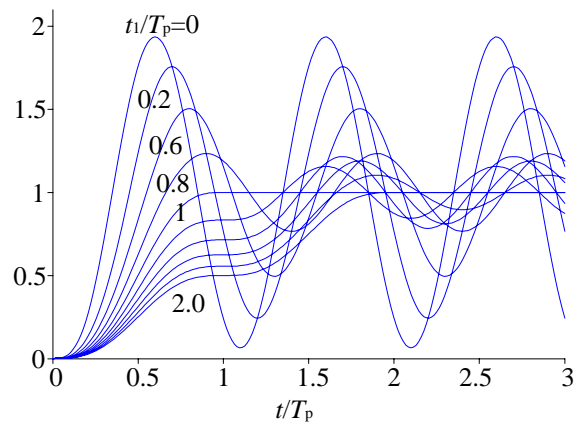


图 2 响应

参考文献

1. 陈奎孚. 机械振动基础. 北京:中国农业大学出版社, 2011 年 12 月.