柔度系数法建立振动方程的若干例题

陈奎孚整理
中国农业大学应用力学系

柔度系数法是建立振动方程的一种重要方法，它对弹簧质量和集中质量梁这类系统使用起来比较方便。本报告给出若干示例。

1. 单自由度

例 1 如图 1(a)所示的简支外伸梁, *AB* 为弹性梁，质量不计， *BC* 为刚性杆，线密度为 ρ_l。求微幅振动的固有频率。

解: 系统为一个自由度, 选择图 1 (b)所示的 θ 为广义坐标。

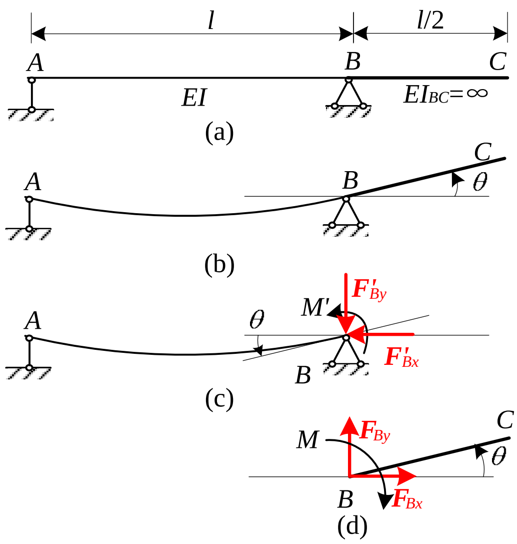


图 1 例 1 简支外伸梁

在 *B* 点将梁截断, 截断面上的内力如图 1 (c)和(d)所示。(c)中作用在铰 *B* 上的两个集中力 $\boldsymbol{F}'_{Bx}$ 和 $\boldsymbol{F}'_{By}$ 对 *AB* 梁的变形没有贡献，有贡献的只有弯矩 M'。根据材料力学简支梁一端加载弯矩的公式有

$$\theta = \frac{l}{3EI} M'$$

BC 梁是绕 *B* 作定轴转动，因此

$$\frac{1}{3}\rho_l\left(\frac{l}{2}\right)^3\ddot{\theta} = -M = -M' = -\frac{3EI}{l}\theta$$

即得微分方程

$$\ddot{\theta} + \frac{72EI}{\rho_l l^4}\theta = 0$$

系统的固有频率为

$$p = \sqrt{\frac{72EI}{\rho_l l^4}}$$

例 2 如图 2(a)所示的简支梁。右端为弹性支撑，$k=\dfrac{48EI}{l^3}$，跨中有一集中质量。用柔度法建立微分方程，并求固有频率。

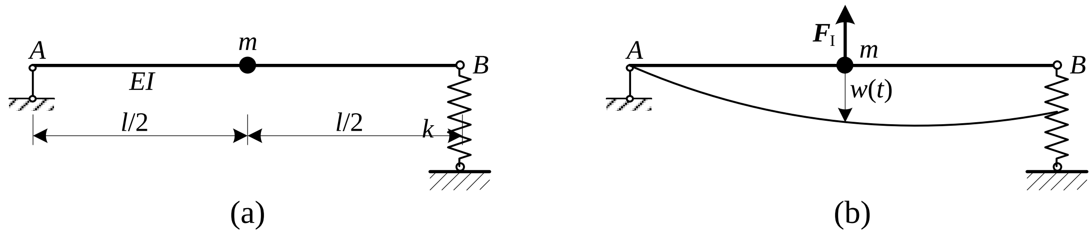


图 2 例 2 简支折梁

解： 结构的变形、质量的运动如图 2(b)所示。集中质量处的变形方程为

$$w(t)=-\delta F_1=-\delta m\ddot{w}(t) \qquad (\#)$$

其中柔度系数δ的物理意义如图 3(a)所示，它可以分解为图 3 (b)和(c)的柔度迭加。

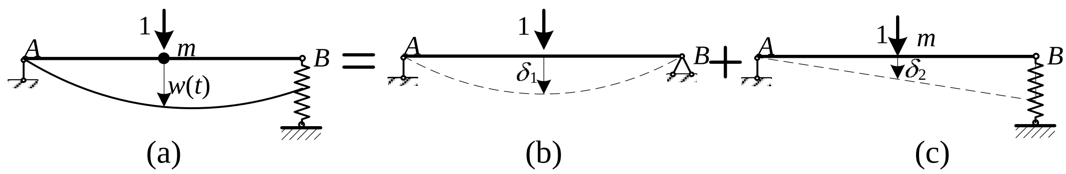


图 3 例 2 柔度系数分解

由材料力学有$\delta_1=\dfrac{l^3}{48EI}$，而$\delta_2=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{1}{4k}=\dfrac{l^3}{192EI}$。 因此

$$\delta=\delta_1+\delta_2=\frac{l^3}{48EI}+\frac{l^3}{192EI}=\frac{5l^3}{192EI}$$

代入方程(#)式得振动微分方程

$$m\ddot{w}+\frac{192EI}{5l^3}w=0$$

固有频率为

$$p=\sqrt{\frac{192EI}{5ml^3}}$$

例 3 如图 4(a)所示的简支折杆上端有一集中质量，用柔度法建立微分方程，并求固有频率。

解： 结构的变形、质量的运动如图 4(b)所示。集中质量处的变形方程为

$$w(t)=-\delta F_1=-\delta m\ddot{w}(t) \qquad (\#)$$

其中柔度系数δ的物理意义如图 5(a)所示。它可以分解为两个分量:水平梁固定不动情况下的悬臂梁挠度(图 5(b));因水平横梁弯曲引起竖直梁的刚性偏移(图 5(b))。根据材料力学有$\delta_1=\dfrac{l^3}{3EI}$。水平梁的弯曲是因竖直悬臂梁根部横截面的弯矩所造成的，该弯矩大小

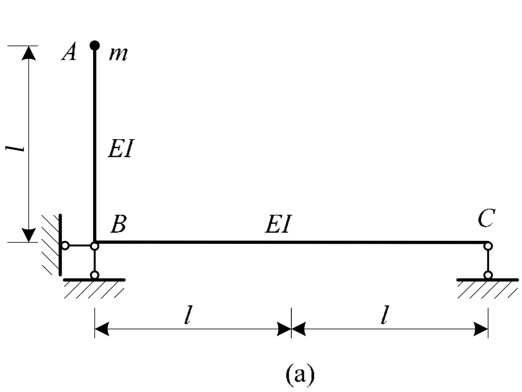


图 4 例 3 有集中质量的简支折杆

为 $M=1\times l$ 。根据材料力学公式，横梁 BC 的支座 B 处转角 $\theta_B=\dfrac{M(2l)}{3EI}=\dfrac{(l\times1)(2l)}{3EI}$ $=\dfrac{2l^2}{3EI}$，从而有 $\delta_2=\theta_B l=\dfrac{2l^3}{3EI}$ 。这样

$$\delta=\delta_1+\delta_2=\frac{l^3}{3EI}+\frac{2l^3}{3EI}=\frac{l^3}{EI}$$

代入(#)式得微分方程

$$m\ddot{w}+\frac{EI}{l^3}w=0$$

固有频率为

$$p=\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

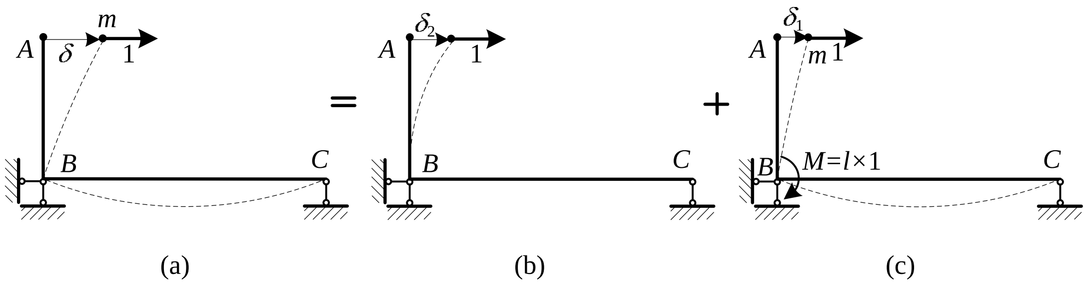
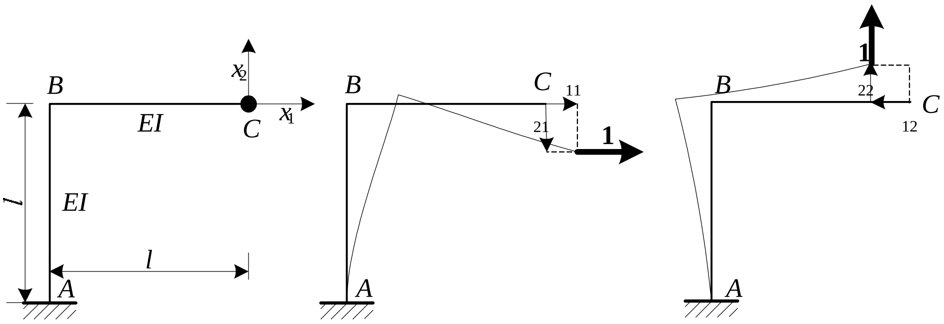


图 5 例题 3 柔度计算

上述例子都运用材料力学已建立的关系。静定结构的变形容易确定，可利用这一特点先勾画出结构的变形，考察集中质量处的变形，从而可确定惯性力。将惯性力当成外部载荷所引起的变形就是“勾画”出的变形，利用这个关系可建立微分方程。此时质量与其余部分的作用为内力，不出现在变形方程中。用材料力学或结构力学已有结果求出变形方程中的柔度系数，代入方程并化简即得系统的运动微分方程。

2. 二自由度

例 4 图 6 的 L 形刚架在端点 C 有集中质量 m，不计重力，梁的截面抗弯刚度为 EI 。用柔度法写出微幅振动的微分方程。



(a) (b) (c)

图 6 例 4 的 L 形刚架

解: (1) 在 C 点沿 x_1 方向施加单位力，变形如图 6 (b)所示。由于小变形，且轴向变形不计，因此 BC 为刚性旋转。而 AB 的变形就是悬臂梁在端点受到集中力的情形。根据材料力学有

$$\delta_{11}=w_B=\frac{l^3}{3EI},\delta_{21}=-\theta_B\times l=\frac{l^3}{2EI} \tag{a}$$

(2) 在 C 点沿 y_1 方向施加单位力，变形如图 6 (c)所示。同样在小变形，不计轴向变形情形下，C 的位移有两个贡献因素，一是由 AB 的 B 端变形导致 BC 的刚性转动，而是 BC 作为悬臂梁的变形，即

$$\delta_{22}=\theta_B\times l+w_{CB}=\frac{l^2}{EI}\times l+\frac{l^3}{3EI}=\frac{4l^3}{3EI} \tag{b}$$

根据对称性

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{l^3}{2EI} \tag{c}$$

综合(a),(b)和(c)，得柔度矩阵 $[\delta]=\frac{l^3}{6EI}\begin{bmatrix}2&-3\\-3&8\end{bmatrix}$,而质量矩阵就是 $[M]=\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}$。将它们代入线性振动微分方程通 式即得振动微分方程。

例 5 写出图 7 所示超静定刚架的刚度矩阵。

解: 本题为一次超静定，直接用柔度法比较困难。我们采用刚度法，但是借用例 4 的柔度法的结果。

(1) 在 C 点施加 $\boldsymbol{F}_{XC}$ 和 $\boldsymbol{F}_{YC}$ 两个力，使得 C 点沿水平方向发生单位位移，而垂直方向无位移，如图 7(b)所示。由于我们考虑微变形和不计轴向变形，因此 D 下方的弹簧没有变形，支坐 D 将有水平方向的反力 $\boldsymbol{F}_{ND}$。DC 杆的抗弯刚度为无穷大，因此 DC 无变形，只有一个旋转角度 $\theta_C=-\frac{1}{l}$。因为 DC 没有变形，我们可以将 $\boldsymbol{F}_{ND}$ 移到 C 点来研究。当等效到 C 点后，除了水平方向有一个方向向左，大小等于 F_{ND} 的力外，还应该附加一个力偶矩 $M_{\mathrm{eq}}=-F_{ND}\times l$。这样我们就需要知道对应力偶的柔度系数。

类似例 4，在 L 形刚架的 C 施加一力偶 $M=1$，如图 7(d)所示。该力偶产生挠度 AB 梁受到纯弯和 BC 梁受到纯弯的合成结果，即

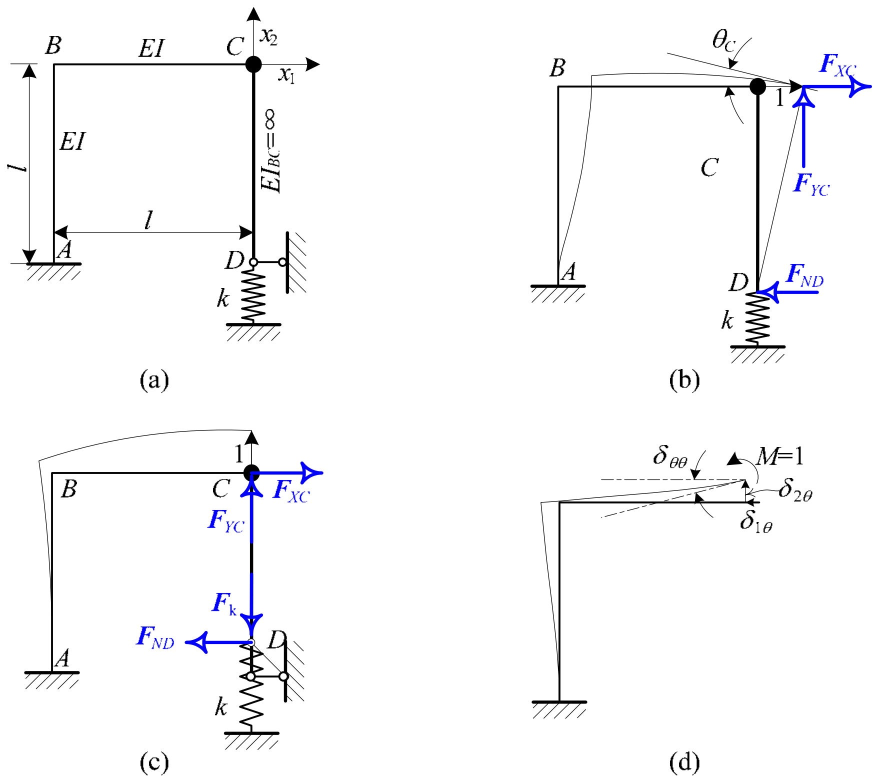


图 7 超静定刚架

$$\delta_{1\theta}=-w_B=-\frac{l^2}{2EI}=\delta_{\theta 1}$$

$$\delta_{2\theta}=\theta_B\times l+w_{CB}=\frac{l}{EI}\times l+\frac{l^2}{2EI}=\frac{3l^2}{2EI}=\delta_{\theta 2}$$

$$\delta_{\theta\theta}=\theta_B+\theta_{CB}=\frac{2l}{EI}$$

这样我们就可以写出C点的位移方程

$$\begin{cases}\delta_{11}(F_{XC}-F_{ND})+\delta_{12}F_{YC}+\delta_{1\theta}(-F_{ND}\times l)=1\\ \delta_{21}(F_{XC}-F_{ND})+\delta_{22}F_{YC}+\delta_{2\theta}(-F_{ND}\times l)=0\\ \delta_{\theta 1}(F_{XC}-F_{ND})+\delta_{\theta 2}F_{YC}+\delta_{\theta\theta}(-F_{ND}\times l)=\theta_C=-1/l\end{cases}$$

可解出

$$\begin{cases}F_{XC}=\dfrac{14EI}{l^3}=k_{11}\\ F_{YC}=\dfrac{9EI}{l^3}=k_{21}\end{cases}\tag{a}$$

(2)在C点施加$\boldsymbol{F}_{XC}$和$\boldsymbol{F}_{YC}$两个力，使得C点沿垂直方向发生单位位移，而水平方向无位移，如图 7(c)所示。由于我们考虑微变形且不计轴向变形，因此DC垂直方向上移一个单位，下方的弹簧伸长一个单位，这样有$\boldsymbol{F}_k$($F_k=k\times 1=\dfrac{13EI}{2l^3}$)，支坐$D$沿水平方向的仍有反力$\boldsymbol{F}_{ND}$。由于$DC$保持垂直，因此$\theta_C=0$。同样将作用在$D$点力移到$C$点来研究，

附加一个力偶矩$M_{\mathrm{eq}}=-F_{ND}\times l$。水平方向和垂直方向都有移来的力$\boldsymbol{F}_{ND}$和$\boldsymbol{F}_{\mathrm{k}}$。

这样C点的位移方程

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}(F_{XC}-F_{ND})+\delta_{12}(F_{YC}-F_{\mathrm{k}})+\delta_{1\theta}(-F_{ND}\times l)=0\\
&\delta_{21}(F_{XC}-F_{ND})+\delta_{22}(F_{YC}-F_{\mathrm{k}})+\delta_{2\theta}(-F_{ND}\times l)=1\\
&\delta_{\theta 1}(F_{XC}-F_{ND})+\delta_{\theta 2}(F_{YC}-F_{\mathrm{k}})+\delta_{\theta\theta}(-F_{ND}\times l)=\theta_C=0
\end{aligned}$$

可解出

$$\begin{cases} F_{XC}=\dfrac{9EI}{l^3}=k_{12} \\ F_{YC}=\dfrac{14EI}{l^3}=k_{22} \end{cases} \tag{b}$$

(a)和(b)合起来得到刚度矩阵

$$[K]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$$

参考书目

1. 陈奎孚. 机械振动基础. 北京:中国农业大学出版社, 2010 年 12 月.
2. 谢官模. 振动力学. 北京: 国防工业出版社, 2007.