

# 阻尼矩阵对角化的评述

陈奎孚

(中国农业大学应用力学系, 北京 100083)

**摘要:** 振动的阻尼既是理论分析的难点, 也是实验和测试的难点。容易处理的模型是能有实模态的阻尼, 最简单就是比例阻尼。本报告首先介绍了比例阻尼, 包括定义、物理意义和确定方法。第二, 回顾了阻尼矩阵可对角化的充要条件及其证明。第三, 总结了工程上采用近似对角处理化的依据。最后给出了由模态阻尼矩阵计算物理系统阻尼矩阵的公式。

**关键词:** 振动 阻尼 实模态

中图分类号: O32

## Remarks on Diagonalizing the Damping Matrix

Kui Fu Chen

(Applied Mechanics Department, China Agricultural University, Beijing 100083)

**Abstract:** Abstract The damping in vibration is difficult for both theoretical analysis and experimental identification. The tractable model from an engineering view is the proportional damping. In this report, the proportional damping's definition, physical meaning and determination method are introduced at first. Then, the sufficient and necessary conditions that a damping matrix is diagonalizable are presented and proved. Thirdly, the approximate diagonalization and its underlying reasons are described. Finally, the formula from the diagonal modal damping matrix to that in physical space is presented.

**Key words:** Vibration; Damping; Real Mode

### 0 引言

对无阻尼系统建立的解耦方法, 不仅数学操作简单, 而且有明显的物理意义和实验可视性, 因而人们自然而然地想将解耦方法推广到阻尼系统。但是这个问题并不简单明了, 比如加州大学的伯克利分校机械工程系 Ma 研究小组近年发表一系列文章在谈论这一“老掉牙”的问题<sup>[1-5]</sup>(这些稿件如果落到国内的某些“学者”、“专家”或“审稿人”的手中, 其命运往往就是莫名其妙的“选题陈旧”或“没有新意”等评价)。更应指出的 Ma 是 Caughey 的研究生, 而 Caughey 教授在约半个世纪前的 1965 年就发表了粘性阻尼矩阵的对角化的那一篇著名的文章<sup>[6]</sup>。

言归正传, 阻尼力的机理非常复杂, 如材料阻尼、结构阻尼、介质粘性阻尼、摩擦阻尼、库仑阻尼等等。为了保证是易于分析的线性方程, 一般将各种阻尼力都简化为与速度成正比的粘性阻尼力。如此简化后,  $N$  自由度线性振动系统的微分方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

这里  $[M]$ ,  $[K]$  和  $[C]$  分别为  $N \times N$  质量矩阵, 刚度矩阵和阻尼矩阵,  $\{f(t)\}$  和  $\{x\}$  分别为  $N \times 1$  的激励和相应向量。

本文将对方程(1)的解耦条件, 近似解耦依据进行评述。

## 1 比例阻尼

### 1.1 定义

瑞利很早就已指出：如果阻尼矩阵 $[C]$ 能表示为

$$[C] = \mu_M [M] + \mu_K [K] \quad (2)$$

那么它就能被无阻尼情形的振型 $[\Phi]$ 对角化。式中 $\mu_M$ 和 $\mu_K$ 是非负常数，由实验确定。

证明：

$$\begin{aligned} [C]_N &= [\Phi]_N^T [C] [\Phi]_N = [\Phi]_N^T (\mu_M [M] + \mu_K [K]) [\Phi]_N \\ &= [\Phi]_N^T \mu_M [M] [\Phi]_N + [\Phi]_N^T \mu_K [K] [\Phi]_N \\ &= \mu_M [M]_N + \mu_K [K]_N = \mu_M [I] + \mu_K [A] \\ &= \begin{bmatrix} \mu_M + \mu_K p_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_M + \mu_K p_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_M + \mu_K p_N^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即 $[C]_N$ 为对角矩阵。

因为关系(2)限制了 $[C]$ 为一定比例的质量矩阵和刚度矩阵的组合，所以瑞利阻尼又称比例阻尼。

### 1.2 物理意义

更简单的情形是仅取式(2)右边某一项。如只取第二项，即 $[C] = \mu_K [K]$ ，这种模型的阻尼与刚度成正比，当然这即使在理论上也不是完美的，因为有既柔软且阻尼大的材料，也有相反性质的元件。同样只第一项 $[C] = \mu_M [M]$ 也是不恰当的，因为粘性阻尼作用在物体表面，而 $\mu_M [M]$ 的形式就意味着物体内部也有显著的粘性阻尼力作用，而且密度大的部分比密度小的阻力更大<sup>[7]</sup>。

如果把上述两项合起来，得到的比例阻尼在工程中已得到了广泛的应用(除非系统有明显的非均质)。这是因为该模型可以兼顾高频和低频的贡献。

令

$$\mu_M + \mu_K p_i^2 = 2\zeta_i p_i \quad (3)$$

或写成

$$\zeta_i = \frac{\mu_M + \mu_K p_i^2}{2p_i}$$

这个参数称为振型比例阻尼比。

我们来检查该振型阻尼比如何随 $\mu_M$ 和 $\mu_K$ 的取值而变化。先令 $\mu_M = 0$ ，则有

$$\zeta_i = \frac{\mu_K}{2} p_i$$

这意味着在各振型振动中，阻尼正比于该振型所对应的固有频率。因而在强迫振动中，“高振型”部分起的作用要小些。再令 $\mu_K = 0$ ，这时有

$$\zeta_i = \frac{\mu_M}{2p_i}$$

这意味着在各阶振动振型中, 阻尼反比于该振型所对应的固有频率。因而强迫振动中的“低振型”部分所起的作用比重减小。所以适当地选取  $\mu_M$  和  $\mu_K$  的值, 就有可能近似地匹配实际振动情形。

### 1.3 确定比例系数

为了确定  $\mu_M$  和  $\mu_K$ , 首先使振系按某两个振型(通常选取为第一和第二阶)分别作自由振动(或强迫振动)。采用单自由度模型确定阻尼比的方法, 得到两个振型的阻尼比值  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$ 。然后将两个实测值, 以及相应的频率  $p_1$  和  $p_2$  的值, 分别代入式(3), 联立求解得<sup>[8]</sup>

$$\mu_M = \frac{2p_1p_2(\zeta_1p_2 - \zeta_2p_1)}{p_2^2 - p_1^2}$$

$$\mu_K = \frac{2(\zeta_2p_2 - \zeta_1p_1)}{p_2^2 - p_1^2}$$

### 1.4 扩展

除了比例阻尼这种最特殊的情形, 还可以找到其他一些限制, 能使  $[C]$  实现对角化。比如 Caughey 阻尼, 它的形式为

$$[C] = [M]^{-1} \sum_i \mu_i ([M][K])^i$$

其中  $\mu_i$  是调控系数。容易验证下面的形式也可对角化( $\mu_{ij}$  为调控系数)

$$[C] = \sum_{i,j} \mu_{ij} [M]^i [K]^j \quad (4)$$

## 2 可对角化阻尼矩阵

可对角化的充要条件是存在矩阵  $[\Phi]$  能够同时使质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵对角化, 即

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [M]_p, \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [K]_p, \quad [\Phi]^T [C] [\Phi] = [C]_p \quad (5)$$

其中  $[M]_p$  和  $[K]_p$  分别为主质量矩阵和主刚度矩阵, 它们均是对角阵。

### 2.1 充要条件

首先要注意若质量、刚度和阻尼能对角化, 则三个矩阵元素不能独立取值。因为式(5)有  $3 \times \frac{N(N+1)}{2}$  个标量方程(阻尼矩阵也对称), 而  $[\Phi]$  和三个主矩阵的待确定未知量只有  $N^2 + 3 \times N$  个。三个系统矩阵  $[M]$ ,  $[C]$  和  $[K]$  之间肯定存在某种约束关系<sup>1</sup>。这个关系于

<sup>1</sup>当然另外一种拓展是将  $[\Phi]$  每个元素假定为复数(式(5)中矩阵转置应理解为共扼转置)。不管问题的复杂性, 我们可看到拓展之后待定未知量为  $2N^2 + 3 \times N$  个, 又超出了式(5)能提供的方程个数。如果认为式(5)的实部和虚部的方程是独立的, 则它将提供了  $3N(N+1)$ , 这再次超出了待定未知量的个数。

1965年由Cauphey给出,即如下定理<sup>[6]</sup>。

**定理** 在矩阵 $[M]$ , $[C]$ 和 $[K]$ 都是正定实对称的假设下,当且仅当满足下列三条件之一:

$$[M][C]^{-1}[K] = [K][C]^{-1}[M] \quad (6)$$

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C] \quad (7)$$

$$[M][K]^{-1}[C] = [C][K]^{-1}[M] \quad (8)$$

就一定存在一个实矩阵 $[\Phi]$ ,可使 $[M]$ , $[C]$ 和 $[K]$ 三者同时对角化。

## 2.2 等价性

先证上述三条件的等价性。由正定的假设,三者都有逆阵;又非奇异矩的乘积必定有逆阵。故对式(6)两边求逆,有

$$[K]^{-1}[C][M]^{-1} = [M]^{-1}[C][K]^{-1}$$

上式两端前后乘以 $[K]$ ,即得式(7)。同理可证式(8)与(7)等价。

## 2.3 必要性

再证定理的必要性。假设已经找到矩阵 $[\Phi]$ 满足式(5),则有

$$[M] = [\Phi]^T [M]_p [\Phi]^{-1}, [K] = [\Phi]^T [K]_p [\Phi]^{-1}, [C] = [\Phi]^T [C]_p [\Phi]^{-1}$$

因而

$$\begin{aligned} [M][C]^{-1}[K] &= ([\Phi]^T [M]_p [\Phi]^{-1})([\Phi]^T [C]_p [\Phi]^{-1})^{-1}([\Phi]^T [K]_p [\Phi]^{-1}) \\ &= [\Phi]^T [M]_p [\Phi]^{-1} [\Phi] [C]_p^{-1} [\Phi]^T [\Phi]^{-1} [K]_p [\Phi]^{-1} \\ &= [\Phi]^T [M]_p [C]_p^{-1} [K]_p [\Phi]^{-1} \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} [K][C]^{-1}[M] &= ([\Phi]^T [K]_p [\Phi]^{-1})([\Phi]^T [C]_p [\Phi]^{-1})^{-1}([\Phi]^T [M]_p [\Phi]^{-1}) \\ &= [\Phi]^T [K]_p [\Phi]^{-1} [\Phi] [C]_p^{-1} [\Phi]^T [\Phi]^{-1} [M]_p [\Phi]^{-1} \\ &= [\Phi]^T [K]_p [C]_p^{-1} [M]_p [\Phi]^{-1} \end{aligned}$$

因为 $[M]_p$ , $[C]_p$ 和 $[K]_p$ 均为对角阵,所以

$$[M]_p [C]_p^{-1} [K]_p = [K]_p [C]_p^{-1} [M]_p$$

这就证明了必要性。

## 2.4 充分性

充分性的证明较为冗长。

从 $[M]$ , $[C]$ 和 $[K]$ 中任选二者,例如 $[M]$ 与 $[C]$ 构成广义特征值问题

$$([C] - \lambda[M])[\Psi] = [0]$$

根据无阻尼振动的讨论,这样的特征向量矩阵 $[\Psi]$ 和特征值 $\lambda$ 肯定存在的。并且我们可以选择特殊的归一化矩阵 $[\Psi]_N$ 使

$$[M]_N = [\Psi]_N^T [M] [\Psi]_N = [I]$$

$$[C]_N = [\Psi]_N^T [C] [\Psi]_N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

下面分三种情形。第一种情况，如果  $\lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_N = \lambda_0$ , 那么必有

$$[C] = \lambda_0 [M]$$

这相当于  $\mu_M = \lambda_0, \mu_K = 0$  的特殊比例阻尼，所以肯定存在一个振型矩阵能使质量、刚度和阻尼矩阵对角化。

第二种情况， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  两两互不相等情形。现假设已经满足式(7)，则有

$$([\Psi]_N^T [C]_N [\Psi]_N^{-1}) ([\Psi]_N^T [\Psi]_N^{-1})^{-1} [K] = [K] ([\Psi]_N^T [\Psi]_N^{-1})^{-1} [\Psi]_N^T [C]_N [\Psi]_N^{-1}$$

即

$$[\Psi]_N^T [C]_N [\Psi]_N^T [K] = [K] [\Psi]_N [C]_N [\Psi]_N^{-1}$$

也就是

$$[C]_N [\Psi]_N^T [K] [\Psi]_N = [\Psi]_N^T [K] [\Psi]_N [C]_N$$

如果把矩阵乘积  $[\Psi]_N^T [K] [\Psi]_N$  记为

$$[\Psi]_N^T [K] [\Psi]_N = [\tilde{K}]$$

将  $[C]_N$  代入得到

$$\lambda_i \tilde{K}_{ij} = \tilde{K}_{ij} \lambda_j$$

因为当  $i \neq j$  时  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ，上式成立当且仅当  $\tilde{K}_{ij} = 0$ ，这就表明了  $[\Psi]_N^T [K] [\Psi]_N = [\tilde{K}]$  为对角阵。

即  $[\Psi]_N$  可同时使  $[M], [C]$  和  $[K]$  对角化。

第三种情况，混合型，即  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  有相等的情形。假定这组特征值可以分解为  $n$  个组。组间的  $\lambda_i$  不相同，但是各组内的  $\lambda_i$  相同。每个组的大小记为  $N_i (i = 1 \sim n)$ 。此时  $[C]_N$  可分解为

$$[C]_N = \begin{bmatrix} \lambda_{\kappa_1} I_{N_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{\kappa_i} I_{N_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_{\kappa_n} I_{N_n} \end{bmatrix}$$

其中  $I_{N_i}$  为  $N_i \times N_i$  单位阵。特征值  $\lambda_{\kappa_i}$  的序号  $\kappa_i$  为

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{i-1} N_j + 1$$

根据第二种情况的论证，可知  $[\tilde{K}]$  为如下的块对角矩阵。

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}]_{N_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & [\tilde{K}]_{N_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & [\tilde{K}]_{N_n} \end{bmatrix}$$

其中对角线上的方阵 $[\tilde{K}]_{N_i}$ 为 $N_i \times N_i$ 阶。显然它是一个对称阵，因此能够找到特征矩阵 $[\mathcal{E}]_{N_i}$ 将其对角化。这个特征矩阵是正交的(因为是常规特征值问题),且起作用的元素位于 $\kappa_i \sim \kappa_{i+1} - 1$ 行和 $\kappa_i \sim \kappa_{i+1} - 1$ 列的交叉位置，也就是对应 $[\tilde{K}]_{N_i}$ 在 $[\tilde{K}]$ 位置。除此之外，与 $N \times N$ 的单位阵完全相同。

$[\tilde{K}]$ 的每一个对角块都找到对角化的阵，就有

$$[\mathcal{E}]_{N_n}^T \cdots [\mathcal{E}]_{N_2}^T [\mathcal{E}]_{N_1}^T [\tilde{K}] [\mathcal{E}]_{N_1} [\mathcal{E}]_{N_2} \cdots [\mathcal{E}]_{N_n} = [\tilde{\Lambda}]$$

右边的 $[\tilde{\Lambda}]$ 是对角矩阵。

我们来考察矩阵 $[\Phi] = [\Psi]_N [\mathcal{E}]_{N_1} [\mathcal{E}]_{N_2} \cdots [\mathcal{E}]_{N_n}$ ，它显然能够使刚度矩阵对角化，

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\mathcal{E}]_{N_n}^T \cdots [\mathcal{E}]_{N_2}^T [\mathcal{E}]_{N_1}^T [\Psi]_N^T [K] [\Psi]_N [\mathcal{E}]_{N_1} [\mathcal{E}]_{N_2} \cdots [\mathcal{E}]_{N_n} = [\tilde{\Lambda}]$$

它也能使质量矩阵对角化

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [\mathcal{E}]_{N_n}^T \cdots [\mathcal{E}]_{N_2}^T [\mathcal{E}]_{N_1}^T [\Psi]_N^T [M] [\Psi]_N [\mathcal{E}]_{N_1} [\mathcal{E}]_{N_2} \cdots [\mathcal{E}]_{N_n} = [I]$$

再来看阻尼矩阵。因为 $[\mathcal{E}]_{N_i}^T$ 仅在对应 $[\tilde{K}]_{N_i}$ 有起作用的元素，而其他位置与单位阵相同，因此通过矩阵分块容易验证

$$[\mathcal{E}]_{N_i}^T [C]_N [\mathcal{E}]_{N_i} = [\mathcal{E}]_{N_i}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\kappa_1} I_{N_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{\kappa_i} I_{N_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_{\kappa_n} I_{N_n} \end{bmatrix} [\mathcal{E}]_{N_i} = [C]_N$$

依此类推有

$$[\mathcal{E}]_{N_n}^T \cdots [\mathcal{E}]_{N_2}^T [\mathcal{E}]_{N_1}^T [C]_N [\mathcal{E}]_{N_1} [\mathcal{E}]_{N_2} \cdots [\mathcal{E}]_{N_n} = [C]_N$$

即对阻尼阵有

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [\mathcal{E}]_{N_n}^T \cdots [\mathcal{E}]_{N_2}^T [\mathcal{E}]_{N_1}^T [\Psi]_N^T [C] [\Psi]_N [\mathcal{E}]_{N_1} [\mathcal{E}]_{N_2} \cdots [\mathcal{E}]_{N_n} = [C]_N$$

这表明 $[\Phi]$ 也可以对阻尼阵对角化。

因为我们已经找到了矩阵 $[\Phi]$ 可对质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵同时对角化，这就证明了充分性。

## 2.5 局限

应该指出 Cauphey 给出条件虽然是充要的，但是应用起来并不如比例阻尼那么广泛，因为上述的关系很难实际操作。好用的表达形式一般将 $[C]$ 表达成 $[M]$ 和 $[K]$ 的显式，如类似

式(2)或(4)那样的显式关系。这是因为我们对  $[M]$  和  $[K]$  比对  $[C]$  更熟悉，而且  $[M]$  和  $[K]$  的物理本质也比  $[C]$  更容易理解，前两者的测量和计算也比后者容易。

### 3 近似对角化

由于可对角化的阻尼矩阵大大降低了振动分析的复杂性，所以对工程中的小阻尼系统，往往直接令  $[\tilde{C}] = [\Phi]^T [C] [\Phi]$  的非对角元素均为零。

这种处理在工程上是可接受的。首先工程结构阻尼都比较小，且各种阻尼的机理至今还没有完全搞清楚，精确测定阻尼的大小也还有很多困难。如果仅仅由于  $[\Phi]^T [C] [\Phi]$  不是对角矩阵，从而必须求解相互耦合的微分方程组 **错误！未找到引用源。**，那么即使我们可以设法克服计算方面的困难，采取这样的分析计算方法所提高的精度也是有限的<sup>[9]</sup>。

其次  $[\Phi]^T [C] [\Phi]$  的非对角线元素  $\tilde{c}_{ij} (i \neq j)$ ，与对角线元素  $\tilde{c}_{ii}$  和  $\tilde{c}_{jj}$  相比，不会很大。这是由于  $[C]$  一般为正定矩阵或半正定矩阵，因此  $[\Phi]^T [C] [\Phi]$  仍然为正定或半正定矩阵。

这样  $[\Phi]^T [C] [\Phi]$  的任意二阶余子式  $\begin{bmatrix} \tilde{c}_{ii} & \tilde{c}_{ij} \\ \tilde{c}_{ji} & \tilde{c}_{jj} \end{bmatrix}$  也应该是正定的。为了保证这个二阶余子式正定，必须有

$$|\tilde{c}_{ij}| \leq \sqrt{\tilde{c}_{ii} \tilde{c}_{jj}} \quad (9)$$

最后，也是最重要一点，很多工程结构的阻尼小，固有频率比较稀疏。对这种结构，当激振频率接近某阶固有频率附近时，可忽略其它固有频率的影响，从而将系统当作单自由度处理。这时自然也就可以忽略非对角线元素  $\tilde{c}_{ij} (i \neq j)$ 。详细论证如下<sup>[9]</sup>：

假定根据无阻尼系统  $[M]$  和  $[K]$  确定的主振型矩阵为  $[\Phi]$ ，我们式对 **错误！未找到引用源。** 用  $\{x\} = [\Phi]\{q\}$  做变换，并左乘  $[\Phi]^T$  有

$$[M]_p \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{q}\} + [K]_p \{q\} = \{Q(t)\} \quad (10)$$

其中  $\{Q(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$  为广义力向量。针对工程中最关心的共振问题，我们再假定广义力  $\{Q(t)\} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}^T \sin \omega t$  为同频率且同相位的简谐力，则式(10)的展开形式为

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{q}_1 + \tilde{c}_{11} \dot{q}_1 + \tilde{c}_{12} \dot{q}_2 + \dots + \tilde{c}_{1N} \dot{q}_N + K_1 q_1 &= Q_1 \sin \omega t \\ M_2 \ddot{q}_2 + \tilde{c}_{21} \dot{q}_1 + \tilde{c}_{22} \dot{q}_2 + \dots + \tilde{c}_{2N} \dot{q}_N + K_2 q_2 &= Q_2 \sin \omega t \\ \vdots & \\ M_N \ddot{q}_N + \tilde{c}_{N1} \dot{q}_1 + \tilde{c}_{N2} \dot{q}_2 + \dots + \tilde{c}_{NN} \dot{q}_N + K_N q_N &= Q_N \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对于方程(11)的稳态解，我们分两种情况分析。

#### 3.1 激励频率距离固有频率比较远

对方程(11)的第  $i$  式

$$M_i \ddot{q}_i + \tilde{c}_{i1} \dot{q}_1 + \tilde{c}_{i2} \dot{q}_2 + \dots + \tilde{c}_{iN} \dot{q}_N + K_i q_i = Q_i \sin \omega t \quad (12)$$

对于线性系统的稳态解，不失一般性  $q_i$  的形式应为  $q_i = A \sin(\omega t + \alpha)$ 。这样式(12)左边的第一项和最后一项之和

$$M_i \ddot{q}_i + K_i q_i = M_i (-\omega^2 + p_i^2) A \sin(\omega t + \alpha)$$



因为我们假定了 $\omega$ 远离 $p_i$ , 所以 $M_i\ddot{q}_i + K_i q_i$ 是比较大的量, 故式(12)左边的他 $N$ 项因很小而可略去(工程系统的阻尼系数很小)。这样该式就退化为

$$M_i\ddot{q}_i + K_i q_i \approx Q_i \sin \omega t$$

这表明当激振频率远离任一固有频率时, 系统就无须考虑阻尼, 也就是可以直接把 $\tilde{c}_{ij} (i \neq j)$ 近似为零。

### 3.2 激励频率接近某阶固有频率

假定激励频率 $\omega$ 接近固有频率 $p_i$ , 则式(12)左端 $M_i\ddot{q}_i$ 和 $K_i q_i$ 两项大小比较接近, 即惯性力与弹性力相互接近平衡, 外力主要与阻尼力相对抗。而在阻尼力各项中, 因各固有频率 $p_1, p_2, \dots, p_N$ 彼此不是非常接近,  $\omega$ 仅与 $p_i$ 比较接近而离其他各固有频率值较远, 又因为阻尼比较小, 所以 $q_i$ 的值远比其他各 $q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_N$ 的值大, 求导之后的速度当然也具有这种性质。前面已经论证非对角元素 $\tilde{c}_{ij} (i \neq j)$ 应与对角元素 $\tilde{c}_{ii}$ 和 $\tilde{c}_{jj}$ 的数值相当或更小, 所以在式(12)左端各项阻尼力中, 往往只有项 $\tilde{c}_{ii}\dot{q}_i$ 项是主要的, 其他各项相比之下均可近似地略去不计。

因此, 只要系统的阻尼比较小, 而且系统的各固有频率值彼此不等且相隔一定距离, 那么按照上述处理方法, 将原来非对角矩阵 $[\Phi]^T[C][\Phi]$ 简化成对角矩阵 $[C]_p$ 进行分析计算, 通常都能求得系统运动规律的很好的近似解。这样, 我们就把振型叠加法和单自由度有阻尼系统的相关结论有效地推广到有阻尼的多自由度系统的振动问题的分析求解。

综合上述两种情况可知, 略去阻尼矩阵的非对角元素组成的各阻尼项, 即令所有非对角线元素 $\tilde{c}_{ij} (i \neq j) = 0$ 的值为零, 并不会引起很大误差。

一般的外力可以看成是许多简谐力的叠加, 因此上述分析在适当推广后仍然有效。

## 4 由模态阻尼反演阻尼矩阵

不管是理论上精确相等, 还是近似处理, 都认为 $[C]$ 能被振型矩阵对角化。这种阻尼常称为模态阻尼。

阻尼一般是测出来的。对称阻尼矩阵 $[C]$ 有 $\frac{N(N+1)}{2}$ 个元素 $c_{ij}$ 需要测定或确定, 工作量十分巨大。如果利用对角化的模态阻尼矩阵, 可以大大简化阻尼测定工作, 而不仅仅是简化了振动分析计算。

我们可以先直接确定或估计系统第 $i$ 阶模态阻尼比的系数 $\zeta_i$ 值, 再由 $C_i = 2\zeta_i M_i p_i = 2\sqrt{M_i K_i} \zeta_i$ 求出 $[C]_p$ 。根据 $[\Phi]^T[C][\Phi] = [C]_p$ 可以反求出物理坐标下的阻尼矩阵 $[C]$ , 即

$$[C] = ([\Phi]^T)^{-1} [C]_p [\Phi]^{-1} \quad (14)$$

为了避免矩阵逆运算, 上式当然也可变为

$$[C] = [M][\Phi][M]_p^{-1}[C]_p[M]_p^{-1}[\Phi]^T[M] \quad (15)$$

这样确定了 $N$ 个模态阻尼就确定了 $[C]$ 。

根据 $[C]_p$ 和 $[M]_p$ 的对角形式, 式(15)可以改写为



$$[C] = [M] \left( \sum_{i=1}^N \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T M_i^{-2} C_i \right) [M] = [M] \left( \sum_{i=1}^N 2M_i^{-1} \zeta_i p_i \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T \right) [M] \quad (16)$$

从此式中可以明显地看出各阶振型阻尼对 $[C]$ 的贡献。

## 5 结束语

本文回顾了阻尼矩阵对角化充要条件, 近似对角化的依据, 以及由模态阻尼矩阵重构物理系统矩阵的公式。期望这些内容能够有助于多自由度阻尼振动的教学。

### [参考文献] (References)

1. Morzfeld M, Ma F. The decoupling of damped linear systems in configuration and state spaces. *Journal of Sound and Vibration* [J]. 2011,330(2):155-161
2. Ma F., Morzfeld M, Imam A. The decoupling of damped linear systems in free or forced vibration. *Journal of Sound and Vibration* [J]. 2010, 329(15):3182-3202
3. Ma F., Imam A., Morzfeld M. The decoupling of damped linear systems in oscillatory free vibration. *Journal of Sound and Vibration* [J]. 2009, 324(1-2):408-428
4. Morzfeld M., Ajavakom N., Ma F. Diagonal dominance of damping and the decoupling approximation in linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration* [J]. 2009,320(1-2): 406-420
5. Morzfeld M., Ajavakom N., Ma F. A remark about the decoupling approximation of damped linear systems. *Mechanics Research Communications* [J]. 2008,35(7):439-446
6. Caughey T.K., O'Kelly M.E.J. Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics (ASME)* [J]. 1965,32:583~588.
7. [日]户川隼人. 振动分析的有限元法[M]. 殷萌龙, 陈学源译. 北京: 地震出版社. 1985:24-27
8. 张相庭, 王志培, 黄本才等. 结构振动力学(第二版) [M]. 上海: 同济大学出版社. 2005:78
9. 郑兆昌. 机械振动(上册)[M]. 北京: 机械工业出版社. 1980:283-288

以下为系统生成表格, 切勿修改表格内容.